

تمرین ۵.۱۲

۱. الف) سری متناوب چیست؟

ب) تحت چه شرطهایی سری متناوب همگراست؟

ج) اگر این شرطها برقرار باشند، دربارهٔ باقیماندهٔ پس از n جمله چه می‌توانید بگویید؟

۲-۲۰ همگرایی یا واگرایی سری موردنظر را بررسی کنید.

۲. $-\frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{3}{5} + \frac{4}{6} - \frac{5}{7} + \dots$

۳. $\frac{4}{7} - \frac{4}{8} + \frac{4}{9} - \frac{4}{10} + \frac{4}{11} - \dots$

۴. $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} - \dots$

۵. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}$ ۶. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+4)}$

۷. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{2n+1}$ ۸. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^2+2}}$

۹. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{10^n}$ ۱۰. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{1+2\sqrt{n}}$

۱۱. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^2+4}$ ۱۲. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{e^{1/n}}{n}$

۱۳. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\ln n}$ ۱۴. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}$

۱۵. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n^{2/3}}$ ۱۶. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n!}$

۱۷. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{n}$ ۱۸. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{\pi}{n}$

۱۹. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{n!}$ ۲۰. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{n}{\delta}\right)^n$

۲۳-۲۶ نشان دهید که سری موردنظر همگراست. لازم است که چند جمله را جمع کنید تا مجموع را با دقت مشخص شده پیدا کنید؟

۲۳. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^6}$ (خطا < 0.000005)

۲۴. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n5^n}$ (خطا < 0.0001)

۲۵. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{10^n n!}$ (خطا < 0.0000005)

۲۶. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} ne^{-n}$ (خطا < 0.01)

۲۷-۳۰ مجموع سری موردنظر را با دقت چهار رقم اعشار تقریب بزنید.

۲۷. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^5}$ ۲۸. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{8^n}$

۲۹. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^2}{10^n}$ ۳۰. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n n!}$

۳۱. مجموع جزئی S_n ام سری متناوب $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ، برای S_{50} ، برای مجموع کل تقریبی اضافی است یا نقصانی؟ توضیح دهید.

۳۲-۳۴ هر یک از سریهای داده شده به‌ازای چه مقدارهایی از p همگراست؟

۳۲. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$

۳۳. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+p}$

۳۴. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\ln n)^p}{n}$

۳۵. نشان دهید که سری $\sum (-1)^{n-1} b_n$ که در اینجا اگر n فرد باشد، $b_n = \frac{1}{n}$ و اگر n زوج باشد $b_n = \frac{1}{n^2}$ ، واگراست. چرا نمی‌توان از آزمون سری متناوب استفاده کرد؟

۳۶. با استفاده از مراحل زیر نشان دهید که

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$

۲۱-۲۲ ۱۰ مجموع جزئی اول سری موردنظر را حساب کنید و دنباله‌های جمله‌ها و دنبالهٔ مجموعهای جزئی را روی یک صفحهٔ نمایش رسم کنید. خطای ناشی از استفاده از مجموع جزئی S_{10} برای تقریب زدن مجموع کل را تخمین بزنید.

۲۱. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{2/3}}$ ۲۲. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

۱. در هر یک از حالت‌های زیر درباره $\sum a_n$ چه چیزی می‌توانید بگویید؟

الف) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 8$ (ب) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0,8$

ج) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$

۲۸-۲ مشخص کنید که سری موردنظر همگرایی مطلق است، همگرایی شرطی است یا واگرا.

۲. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$

۳. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-10)^n}{n!}$

۴. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n}{n^2}$

۶. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

۸. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1000^n}$

۱۰. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^2+2}}$

۱۲. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 4n}{4^n}$

۵. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$

۷. $\sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{2}{3} \right)^k$

۹. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(1/2)^n}{n^2}$

۱۱. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{1/n}}{n^2}$

۱۳. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(n+1)4^{2n+1}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \arctan n}{n^r} \quad .15$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^r 2^n}{n!} \quad .14$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} \quad .17$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 - \cos n}{n^{r/r} - 2} \quad .16$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{3}}{n!} \quad .19$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad .18$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^r + 1}{2n^r + 1} \right)^n \quad .21$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^n} \quad .20$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^r} \quad .23$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{-2n}{n+1} \right)^{\Delta n} \quad .22$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n} \quad .24$$

$$1 - \frac{1 \times 3}{3!} + \frac{1 \times 3 \times 5}{5!} - \frac{1 \times 3 \times 5 \times 7}{7!} + \dots \quad .25$$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{(2n-1)!} + \dots$$

$$\frac{2}{5} + \frac{2 \times 6}{5 \times 8} + \frac{2 \times 6 \times 10}{5 \times 8 \times 11} + \frac{2 \times 6 \times 10 \times 14}{5 \times 8 \times 11 \times 14} + \dots \quad .26$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)}{n!} \quad .27$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n n!}{5 \times 8 \times 11 \times \dots \times (3n+2)} \quad .28$$

۲۹. جمله‌های سری به‌طور بازگشتی با تساویهای

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{5n+1}{4n+3} a_n$$

تعریف شده‌اند. مشخص کنید که $\sum a_n$ همگراست یا واگرا.

۳۰. سری $\sum a_n$ با تساویهای

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{2 + \cos n}{\sqrt{n}} a_n$$

تعریف شده است. مشخص کنید که $\sum a_n$ همگراست یا واگرا.

۳۱. در مورد کدامیک از سریهای زیر آزمون نسبت نتیجه قطعی دربر

ندارد (یعنی، جواب مشخصی نمی‌دهد)؟

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$

د) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+n^r}$

ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

۳۸-۱ همگرایی یا واگرایی سری موردنظر را بررسی کنید.

- | | | | |
|---|---|---|---|
| $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$.۱۹ | $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+5}{5^k}$.۲۰ | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^n}{n^{2n}}$.۲ | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3^n}$.۱ |
| $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{2n}}{n^n}$.۲۱ | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^r-1}}{n^r+2n^r+5}$.۲۲ | $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^r+2}$.۴ | $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+2}$.۳ |
| $\sum_{n=1}^{\infty} \tan \frac{1}{n}$.۲۳ | $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$.۲۴ | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$.۶ | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^r 2^{n-1}}{(-5)^n}$.۵ |
| $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^{n^r}}$.۲۵ | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^r+1}{5^n}$.۲۶ | $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{(k+2)!}$.۸ | $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$.۷ |
| $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \ln k}{(k+1)^r}$.۲۷ | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^r}$.۲۸ | $\sum_{n=1}^{\infty} n^r e^{-n^r}$.۱۰ | $\sum_{k=1}^{\infty} k^r e^{-k}$.۹ |
| $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\cosh n}$.۲۹ | $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{\sqrt{j}}{j+5}$.۳۰ | $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$.۱۲ | $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln n}$.۱۱ |
| $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{3^k+4^k}$.۳۱ | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{r^n}}$.۳۲ | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n}{1+2^n}$.۱۴ | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^r}{n!}$.۱۳ |
| $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\sqrt{n}}$.۳۳ | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+n \cos^r n}$.۳۴ | $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2 \times 5 \times 8 \times \dots \times (3n+2)}$.۱۵ | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^r+1}{n^r+1}$.۱۶ |
| $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^r}$.۳۵ | $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.۳۶ | | $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^r 1/n}$.۱۷ |
| $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2}-1)^n$.۳۷ | $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2}-1)$.۳۸ | | $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n-1}}$.۱۸ |