

## تمرین ۹.۱۶

۶-۱ زا کوبی تبدیل موردنظر را پیدا کنید.

۱.  $y = u + 3v, x = 5u - v$

۲.  $y = \frac{u}{v}, x = uv$

۳.  $y = e^r \cos \theta, x = e^{-r} \sin \theta$

۴.  $y = e^{s-t}, x = e^{s+t}$

۵.  $z = \frac{w}{u}, y = \frac{v}{w}, x = \frac{u}{v}$

۶.  $z = u + v^2, y = w + u^2, x = v + w^2$

$$y = u - v, x = 2u + 3v$$

۸.  $S$  مربع محدود به خطهای  $u = 0, u = 1, v = 0, v = 1$  است:

$$y = u(1 + v^2), x = v$$

۹.  $S$  ناحیه مثلثی با رأسهای  $(0, 0), (1, 1), (0, 1)$  است:  $x = u^2$

$$y = v$$

۱۰.  $S$  قرص  $u^2 + v^2 \leq 1$  است:  $x = au, y = bv$

۱۱-۱۶ با استفاده از تبدیل داده شده انتگرال موردنظر را حساب کنید.

۱۱.  $\iint_R (x - 3y) dA$ ، که در اینجا  $R$  ناحیه مثلثی با رأسهای  $(0, 0), (2, 1), (1, 2)$  است:  $x = 2u + v, y = u + 2v$

۷-۱۰ تصویر مجموعه  $S$  را تحت تبدیل داده شده پیدا کنید.

۷.  $S = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq 3, 0 \leq v \leq 2\}$

۱۸. اگر چگالی جسم سه بعدی تمرین ۱۷ (الف) مقدار ثابت  $k$  باشد، گشتاور لختی آن حول محور  $z$  را پیدا کنید.

۱۹-۲۳ انتگرال مورد نظر را با انجام تغییر متغیر مناسب حساب کنید.

۱۹.  $\iint_R \frac{x-2y}{3x-y} dA$  که در اینجا  $R$  متوازی الاضلاع محصور به خطهای  $x-2y=0$ ،  $x-2y=4$ ،  $x-y=1$  و  $3x-y=8$  است.

۲۰.  $\iint_R (x+y)e^{x^2-y^2} dA$  که در اینجا  $R$  مستطیل محصور به خطهای  $x-y=0$ ،  $x-y=2$ ،  $x+y=0$  و  $x+y=3$  است.

۲۱.  $\iint_R \cos\left(\frac{y-x}{y+x}\right) dA$  که در اینجا  $R$  ناحیه دوزنقه‌ای با رأسهای  $(1,0)$ ،  $(2,0)$ ،  $(0,2)$  و  $(0,1)$  است.

۲۲.  $\iint_R \sin(9x^2+4y^2) dA$  که در اینجا  $R$  ناحیه در ربع اول است که محدود به بیضی  $9x^2+4y^2=1$  است.

۲۳.  $\iint_R e^{x+y} dA$  که در اینجا  $R$  با نامعادله  $|x|+|y| \leq 1$  مشخص شده است.

۱۲.  $\iint_R (4x+8y) dA$  که در اینجا  $R$  متوازی الاضلاع با رأسهای  $(-1,3)$ ،  $(1,-3)$ ،  $(3,-1)$  و  $(1,5)$  است؛  $x = \frac{1}{4}(u+v)$ ،  $y = \frac{1}{4}(v-3u)$

۱۳.  $\iint_R x^2 dA$  که در اینجا  $R$  ناحیه محدود به بیضی  $9x^2+4y^2=36$  است؛  $x=2u$ ،  $y=3v$

۱۴.  $\iint_R (x^2-xy+y^2) dA$  که در اینجا  $R$  ناحیه محدود به بیضی  $x^2-xy+y^2=2$  است؛  $x = \sqrt{2}u - \sqrt{\frac{2}{3}}v$ ،  $y = \sqrt{2}u + \sqrt{\frac{2}{3}}v$

۱۵.  $\iint_R xy dA$  که در اینجا  $R$  ناحیه ربع اول است که محدود به خطهای  $y=x$  و  $y=3x$  و هذلولیهای  $xy=1$  و  $xy=3$  است؛  $x = \frac{u}{v}$ ،  $y=v$

۱۶.  $\iint_R y^2 dA$  که در اینجا  $R$  ناحیه محدود به منحنیهای  $xy=1$ ،  $xy=2$ ،  $xy^2=1$ ،  $xy^2=2$  است؛  $u=xy$ ،  $v=xy^2$  را با استفاده از ماشین حساب رسام یا کامپیوتر بکشید.

۱۷. (الف)  $\iiint_E dV$  که در اینجا  $E$  جسم سه بعدی محصور به بیضی وار  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  است، حساب کنید. از تبدیل  $x=au$ ،  $y=bv$ ،  $z=cw$  استفاده کنید.

(ب) زمین کره‌ای کامل نیست؛ دوران منجر به تختی در قطبها شده است. بنابراین شکل زمین را می‌توان با بیضی‌واری که در آن  $a=b=6378 \text{ km}$  و  $x=6356 \text{ km}$  تقریب زد. با استفاده از قسمت (الف) حجم زمین را تخمین بزنید.

۲۴. فرض کنید  $f$  روی  $[0,1]$  پوسته باشد و  $R$  ناحیه مثلثی با رأسهای  $(0,0)$ ،  $(1,0)$  و  $(0,1)$  باشد. نشان دهید که

$$\iint_R f(x+y) dA = \int_0^1 u f(u) du$$