۷.۱۶ تمرین

۱-۲ نقطه‌ای را که مختصات استوانه‌ای‌اش داده شده است رسم کنید.

۱. الف) $\left(۲, \frac{\pi}{۴}, ۱\right)$ ب) $\left(۴, -\frac{\pi}{۳}, ۵\right)$

۲. الف) $(۱, \pi, e)$ ب) $\left(۱, \frac{۳\pi}{۲}, ۲\right)$

۳-۴ از مختصات قائم به استوانه‌ای تبدیل کنید.

۳. الف) $(۱, -۱, ۴)$ ب) $(-۱, -\sqrt{۳}, ۲)$

۴. الف) $(۲\sqrt{۳}, ۲, -۱)$ ب) $(۴, -۳, ۲)$

۵-۶ رویه‌ای را که معادله‌اش داده شده است با کلمات توصیف کنید.

۵. $\theta = \frac{\pi}{۴}$ ۶. $r = ۵$

۷-۸ نوع رویه‌ای را که معادله‌اش داده شده است تعیین کنید.

۷. $z = ۴ - r^۲$ ۸. $۲r^۲ + z^۲ = ۱$

۹-۱۰ معادله‌ها را در مختصات استوانه‌ای بنویسید.

۹. الف) $z = x^۲ + y^۲$ ب) $x^۲ + y^۲ = ۲y$

۱۰. الف) $۳x + ۲y + z = ۶$ ب) $-x^۲ - y^۲ + z^۲ = ۱$

۱۱-۱۲ جسم سه‌بعدی را که با نامعادله‌های داده‌شده توصیف شده است رسم کنید.

۱۱. $۰ \le r \le ۲$، $-\frac{\pi}{۲} \le \theta \le \frac{\pi}{۲}$، $۰ \le z \le ۱$

۱۲. $۰ \le \theta \le \frac{\pi}{۲}$، $۰ \le r \le ۲$، $r \le z \le ۲$

۱۳. طول پوسته‌ای استوانه‌ای ۲۰ cm است، قطر داخلی‌اش ۶ cm است و قطر خارجی‌اش ۷ cm. نامعادله‌هایی بنویسید که این پوسته را در دستگاه مختصاتی مناسب توصیف کنند. توضیح دهید که این دستگاه مختصات را نسبت به پوسته در کجا قرار می‌دهید.

۱۴. با استفاده از ابزار رسامی جسم سه‌بعدی محصور به سهمی‌وارهای $z = x^۲ + y^۲$ و $z = ۵ - x^۲ - y^۲$ را بکشید.

۱۵-۱۶ جسم سه‌بعدی را که حجمش با انتگرال داده‌شده مشخص شده است رسم کنید و انتگرال را حساب کنید.

۱۵. $\int_۰^۴ \int_۰^{۲\pi} \int_r^۴ r \, dz \, d\theta \, dr$

۱۶. $\int_۰^{\pi/۲} \int_۰^۲ \int_۰^{۹-r^۲} r \, dz \, dr \, d\theta$

۱۷-۲۶ از مختصات استوانه‌ای استفاده کنید.

۱۷. $\iiint_E \sqrt{x^۲ + y^۲} \, dV$ را، که در اینجا E ناحیه‌ای است که درون استوانهٔ $x^۲ + y^۲ = ۱۶$ و بین صفحه‌های $z = -۵$ و $z = ۴$ قرار دارد، حساب کنید.

۱۸. $\iiint_E (x^۳ + xy^۲) \, dV$ را، که در اینجا E جسم سه‌بعدی در یک هشتم اول است که زیر سهمی‌وار $z = ۱ - x^۲ - y^۲$ قرار دارد، حساب کنید.

۱۹. $\iiint_E e^z \, dV$ را، که در اینجا E محصور به سهمی‌وار $z = ۱ + x^۲ + y^۲$، استوانهٔ $x^۲ + y^۲ = ۵$ و صفحهٔ xy است، حساب کنید.

۲۰. $\iiint_E x \, dV$ را، که در اینجا E محصور به صفحه‌های $z = ۰$ و $z = x + y + ۵$ و استوانه‌های $x^۲ + y^۲ = ۴$ و $x^۲ + y^۲ = ۹$ است، حساب کنید.

۲۱. $\iiint_E x^۲ \, dV$ را، که در اینجا E جسم سه‌بعدی است که درون استوانهٔ $x^۲ + y^۲ = ۱$، بالای صفحهٔ $z = ۰$ و زیر مخروط $z^۲ = ۴x^۲ + ۴y^۲$ قرار دارد، حساب کنید.

۲۲. حجم جسم سه‌بعدی را که هم درون استوانهٔ $x^۲ + y^۲ = ۱$ قرار دارد هم درون کرهٔ $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۴$ پیدا کنید.

۲۳. الف) حجم ناحیهٔ E محدود به سهمی‌وارهای $z = x^۲ + y^۲$ و $z = ۳۶ - ۳x^۲ - ۳y^۲$ را پیدا کنید.

ب) مرکزوار E (مرکز جرم در حالتی که چگالی ثابت است) را پیدا کنید.

شکل ۱۱

۸.۱۶ تمرین

۱-۲ نقطه‌ای را که مختصات کروی‌اش داده شده است رسم کنید. سپس مختصات قائم این نقطه را پیدا کنید.

۱. الف) $(۱, ۰, ۰)$ ب) $\left(۲, \frac{\pi}{۳}, \frac{\pi}{۴}\right)$

۲. الف) $\left(۵, \pi, \frac{\pi}{۲}\right)$ ب) $\left(۴, \frac{۳\pi}{۴}, \frac{\pi}{۳}\right)$

۳-۴ از مختصات قائم به مختصات کروی تبدیل کنید.

۳. الف) $(۱, \sqrt{۳}, ۲\sqrt{۳})$ ب) $(۰, -۱, -۱)$

۴. الف) $(۰, \sqrt{۳}, ۱)$ ب) $(-۱, ۱, \sqrt{۶})$

۵-۶ رویه‌ای را که معادله‌اش داده شده است با کلمات توصیف کنید.

۵. $\phi = \frac{\pi}{۳}$ ۶. $\rho = ۳$

۷-۸ نوع رویه‌ای را که معادله‌اش داده شده است تعیین کنید.

۷. $\rho = \sin\theta \sin\phi$

۸. $\rho^2(\sin^2\phi\sin^2\theta+\cos^2\phi)=9$

۹-۱۰ معادلهٔ موردنظر را در مختصات کروی بنویسید.

۹. الف) $z^2=x^2+y^2$ ب) $x^2+z^2=9$

۱۰. الف) $x^2-2x+y^2+z^2=0$

ب) $x+2y+3z=1$

۱۱-۱۴ جسم سه‌بعدی را که با نامعادله‌های داده‌شده توصیف شده است رسم کنید.

۱۱. $2\le\rho\le4$، $0\le\phi\le\frac{\pi}{2}$، $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

۱۲. $2\le\rho\le3$، $\frac{\pi}{2}\le\phi\le\pi$

۱۳. $1\le\rho$، $\frac{3\pi}{4}\le\phi\le\pi$

۱۴. $2\le\rho$، $\rho\le\csc\phi$

۱۵. جسمی سه‌بعدی بالای مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و پایین کرهٔ $x^2+y^2+z^2=z$ قرار دارد. توصیفی برای این جسم سه‌بعدی برحسب نامعادله‌هایی که در آنها مختصات کروی وجود دارد بنویسید.

۱۶. الف) نامعادله‌هایی بنویسید که گوی خالی به قطر ۳۰ cm و ضخامت ۰٫۵ cm را توصیف کنند. توضیح دهید که دستگاه مختصاتی را که انتخاب کرده‌اید چگونه قرار می‌دهید.

ب) فرض کنید که این گوی نصف می‌شود. نامعادله‌هایی بنویسید که یکی از این نیمه‌ها را توصیف می‌کنند.

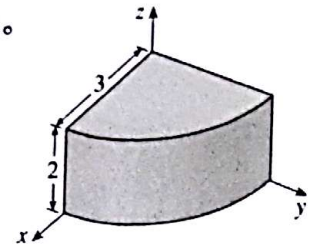
۱۷-۱۸ جسم سه‌بعدی را که حجمش با انتگرال داده‌شده مشخص شده است رسم کنید و این انتگرال را حساب کنید.

۱۷. $\int_0^{\pi/6}\int_0^{\pi/2}\int_0^{3}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$

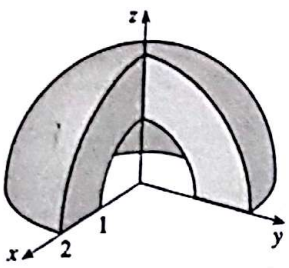
۱۸. $\int_0^{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\int_1^{2}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$

۱۹-۲۰ انتگرالی سه‌گانه برای تابع پیوستهٔ دلخواه $f(x,y,z)$ در مختصات استوانه‌ای یا کروی روی جسم سه‌بعدی که در ستون روبه‌رو نشان داده شده است بنویسید.

۱۹.



۲۰.



۲۱-۳۴ از مختصات کروی استفاده کنید.

۲۱. $\iiint_B(x^2+y^2+z^2)^2\,dV$ را، که در اینجا B گوی به مرکز مبدأ و شعاع ۵ است، حساب کنید.

۲۲. $\iiint_H(9-x^2-y^2)\,dV$ را، که در اینجا H نیمکرهٔ توپُر $x^2+y^2+z^2\le9$، $z\ge0$ است، حساب کنید.

۲۳. $\iiint_E z\,dV$ را، که در اینجا E میان کره‌های $x^2+y^2+z^2=1$ و $x^2+y^2+z^2=4$ در یک‌هشتم اول قرار دارد، حساب کنید.

۲۴. $\iiint_E e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dV$ را، که در اینجا E محصور به کرهٔ $x^2+y^2+z^2=9$ در یک‌هشتم اول است، حساب کنید.

۲۵. $\iiint_E x^2\,dV$ را، که در اینجا E محدود به صفحهٔ xz و نیمکره‌های $y=\sqrt{9-x^2-z^2}$ و $y=\sqrt{16-x^2-z^2}$ است، حساب کنید.

۲۶. $\iiint_E xyz\,dV$ را، که در اینجا E میان کره‌های $\rho=2$ و $\rho=4$ و بالای مخروط $\phi=\frac{\pi}{3}$ قرار دارد، حساب کنید.

۲۷. حجم آن قسمت از گوی $\rho\le a$ را که میان مخروطهای $\phi=\frac{\pi}{6}$ و $\phi=\frac{\pi}{3}$ قرار دارد، حساب کنید.

۲۸. فاصلهٔ متوسط نقطه‌ای روی گویی به شعاع a تا مرکزش را پیدا کنید.

۲۹. الف) حجم جسم سه‌بعدی را که بالای مخروط $\phi=\frac{\pi}{3}$ و پایین کرهٔ $\rho=4\cos\phi$ قرار دارد پیدا کنید.

ب) مرکزوار جسم سه‌بعدی قسمت (الف) را پیدا کنید.

۳۰. حجم جسم سه‌بعدی را که درون کرهٔ $x^2+y^2+z^2=4$، بالای صفحهٔ xy و پایین مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ قرار دارد پیدا کنید.

۳۱. مرکزوار جسم سه‌بعدی تمرین ۲۵ را پیدا کنید.

۳۲. فرض کنید H نیمکره‌ای به شعاع a باشد که چگالی‌اش در هر نقطه متناسب با فاصله‌اش تا مرکز قاعدهٔ نیمکره باشد.

۳۵-۳۸ از مختصات استوانه‌ای یا کروی، هر کدام که مناسبتر است، استفاده کنید.

۳۵. حجم و مرکزوار جسم سه‌بعدی E را که بالای مخروط $z = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ و زیر کرهٔ $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱$ قرار دارد پیدا کنید.

۳۶. حجم کوچکترین گوه‌ای را که دو صفحه از کره‌ای به شعاع a جدا می‌کنند و یکدیگر را روی قطری از کره تحت زاویهٔ $\frac{\pi}{۶}$ قطع می‌کنند پیدا کنید.

۳۷. CAS $\iiint_E z\,dV$ را، که در اینجا E بالای سهمی‌وار $z = x^۲ + y^۲$ و زیر صفحهٔ $z = ۲y$ قرار دارد، حساب کنید. از جدول انتگرالها (در انتهای قسمت اول، جلد دوم) یا سیستمهای جبری کامپیوتری برای محاسبهٔ انتگرال استفاده کنید.

۳۸. الف) حجم محصور به چنبرهٔ $\rho = \sin\phi$ را پیدا کنید.

ب) با استفاده از کامپیوتر این چنبره را بکشید.

۳۹-۴۰ انتگرال موردنظر را با رفتن به مختصات کروی حساب کنید.

۳۹. $$\int_۰^۱ \int_۰^{\sqrt{۱-x^۲}} \int_{\sqrt{x^۲+y^۲}}^{\sqrt{۲-x^۲-y^۲}} xy\,dz\,dy\,dx$$

۴۰. $$\int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^۲-y^۲}}^{\sqrt{a^۲-y^۲}} \int_{-\sqrt{a^۲-x^۲-y^۲}}^{\sqrt{a^۲-x^۲-y^۲}} (x^۲z + y^۲z + z^۳)\,dz\,dx\,dy$$