

---

۲۱-۲۴ مقدار حد داده شده را با استفاده از جدولی برای مقدارهای تابع موردنظر تخمین بزنید. اگر وسیله‌ای برای رسم شکل دارید، با استفاده از آن درستی نتیجه‌ای را که به دست آورده‌اید از روی شکل نشان دهید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\tan 5x} \quad .22$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} \quad .21$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9^x - 5^x}{x} \quad .24$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 1}{x^{10} - 1} \quad .23$$

---

۲۵-۳۲ حدهای نامتناهی زیر را مشخص کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x+2}{x+3} \quad .26$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x+2}{x+3} \quad .25$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 1}{x^2(x + 2)} \quad .28$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - x}{(x - 1)^2} \quad .27$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \cot x \quad .30$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x - 1}{x^2(x + 2)} \quad .29$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4} \quad .32$$

$$\lim_{x \rightarrow 2\pi^-} x \csc x \quad .31$$

۹-۳ هر یک از حدهای زیر را حساب کنید و در هر مرحله بگویید از کدام قاعده یا قاعده‌های حدگیری استفاده کرده‌اید.

$$\lim_{x \rightarrow -2} (3x^4 + 2x^2 - x + 1) \quad .۳$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 6x - 4} \quad .۴$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} (1 + \sqrt{x})(2 - 6x^2 + x^3) \quad .۵$$

$$\lim_{t \rightarrow -1} (t^2 + 1)^3 (t + 3)^5 \quad .۶$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1 + 3x}{1 + 4x^2 + 3x^4} \right)^3 \quad .۷$$

$$\lim_{u \rightarrow -2} \sqrt{u^4 + 3u + 6} \quad .۸$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \sqrt{16 - x^2} \quad .۹$$

---

ب) با در نظر داشتن قسمت (الف)، توضیح دهید که چرا تساوی

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 3)$$

درست است.

۱۱-۳۰ حد داده شده را، در صورت وجود، حساب کنید.

۱۱.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$       ۱۲.  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 3x - 4}$

۱۳.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x + 6}{x - 2}$       ۱۴.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$

۱۵.  $\lim_{t \rightarrow -2} \frac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3}$       ۱۶.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$

۱۷.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4+h)^2 - 16}{h}$       ۱۸.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$

۱۹.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^2+8}$       ۲۰.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 8}{h}$

۲۱.  $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{9-t}{3-\sqrt{t}}$       ۲۲.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h}$

۲۳.  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - 3}{x-7}$       ۲۴.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$

۲۵.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{x}}{4+x}$       ۲۶.  $\lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2 + t} \right)$

۲۷.  $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{4 - \sqrt{x}}{16x - x^2}$       ۲۸.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^{-1} - 3^{-1}}{h}$

۲۹.  $\lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{1}{t\sqrt{1+t}} - \frac{1}{t} \right)$       ۳۰.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2+9} - 5}{x+4}$

۳۱. الف) با ترسیم نمودار تابع  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$  مقدار

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$$

را تخمین بزنید.

ب) جدولی از مقادیرهای  $f(x)$  به ازای  $x$  های نزدیک به ۰ تشکیل دهید و مقدار حد مورد نظر را حدس بزنید.

ج) با استفاده از قاعده‌های حدگیری ثابت کنید که حدستان درست است.

۳۲. الف) با استفاده از نمودار تابع

$$f(x) = \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3}}{x}$$

مقدار  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  را تا دو رقم اعشار حساب کنید.  
ب) با استفاده از جدولی از مقادیرهای  $f(x)$  حد مورد نظر را تا چهار رقم اعشار حساب کنید.

ج) مقدار دقیق حد مورد نظر را با استفاده از قاعده‌های حدگیری پیدا کنید.

۳۳. با استفاده از قضیه فشردگی نشان دهید که

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cos 2\pi x) = 0$$

درستی این حکم را با رسم کردن نمودار تابعهای  $f(x) = -x^2$  و  $g(x) = x^2 \cos 2\pi x$  روی یک صفحه نیز نشان دهید.

۳۴. با استفاده از قضیه فشردگی نشان دهید که

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + x^2} \sin \frac{\pi}{x} = 0$$

درستی این حکم را با رسم کردن نمودار تابعهای  $f, g, h$  روی یک صفحه نیز نشان دهید.

۳۵. اگر به ازای  $x \geq 0$

$$4x - 9 \leq f(x) \leq x^2 - 4x + 7$$

$\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$  را پیدا کنید.

۳۶. اگر به ازای هر  $x$

$$2x \leq g(x) \leq x^2 - x^2 + 2$$

$\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$  را حساب کنید.

۳۷. ثابت کنید  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{2}{x} = 0$

۳۸. ثابت کنید  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \left( 1 + \sin^2 \frac{2\pi}{x} \right) = 0$

۳۹-۴۴ حد داده شده را، در صورت وجود، پیدا کنید. اگر این حد وجود ندارد توضیح دهید که چرا وجود ندارد.

۴۰.  $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{2x+12}{|x+6|}$

۳۹.  $\lim_{x \rightarrow 2} (2x + |x - 3|)$

۳.۲ محاسبه حد با استفاده از قاعده‌های حدگیری

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2 - |x|}{2 + x} \quad .۴۲$$

$$\lim_{x \rightarrow 0,5^-} \frac{2x - 1}{|2x^3 - x^2|} \quad .۴۱$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right) \quad .۴۴$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right) \quad .۴۳$$

۶۰.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6-x} - 2}{\sqrt{3-x} - 1}$  را حساب کنید.

۶۱. آیا عددی مانند  $a$  وجود دارد که

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$$



۱۵. معادله

$$x^{10} - 10x^2 + 5 = 0$$

ریشه‌های در بازه (۰, ۲) دارد.

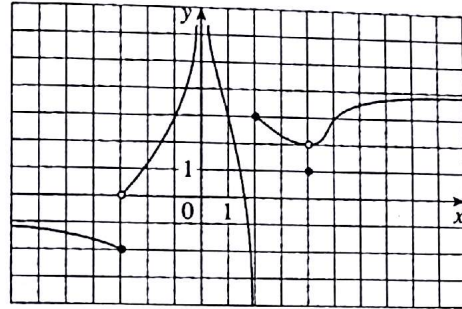
۱۴. اگر به ازای هر  $x$ ,  $f(x) > 1$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  وجود داشته باشد،

آن وقت

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) > 1$$

تمرین

۱. در شکل زیر نمودار  $f$  داده شده است.



۱۱.  $\lim_{u \rightarrow 1} \frac{u^2 - 1}{u^2 + 5u^2 - 6u}$

۱۲.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+6} - x}{x^2 - 3x^2}$

۱۳.  $\lim_{s \rightarrow 16} \frac{4 - \sqrt{s}}{s - 16}$

۱۴.  $\lim_{v \rightarrow 2} \frac{v^2 + 2v - 8}{v^2 - 16}$

۱۵.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x}$

۱۶.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right)$

(الف) هر یک از حدهای زیر را پیدا کنید یا توضیح دهید که چرا حد مورد نظر وجود ندارد.

$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$  (ii)       $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$  (i)

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  (iv)       $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$  (iii)

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$  (vi)       $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  (v)

(ب) معادله‌های مجانبی قائم را مشخص کنید.

(ج)  $f$  در چه عددهایی ناپیوسته است؟ توضیح دهید.

۲. نمودار تابعی مانند  $f$  را رسم کنید که در همه شرطهای زیر صدق کند:

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -2$ ,       $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$ ,       $f(0) = -1$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \infty$ ,       $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$

۳-۱۶ حد مورد نظر را پیدا کنید.

۴.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 3}$

۳.  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x + \sin x)$

۶.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 3}$

۵.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 3}$

۸.  $\lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^2 - 4}{t^2 - 8}$

۷.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h-1)^2 + 1}{h}$

۱۰.  $\lim_{v \rightarrow 4^+} \frac{4-v}{|4-v|}$

۹.  $\lim_{r \rightarrow 9} \frac{\sqrt{r}}{(r-9)^2}$

۲۳. فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & x < 0 \\ 3-x & 0 \leq x < 3 \\ (x-3)^2 & x > 3 \end{cases}$$

(الف) هر یک از حدهای زیر را، در صورت وجود، حساب کنید

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  (ii)       $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  (i)

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  (iv)       $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  (iii)

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  (vi)       $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$  (v)

(ب)  $f$  در کجاها ناپیوسته است؟

(ج) نمودار  $f$  را رسم کنید.