بسم الله الرحمن الرحیم

آنالیز تابعی

دکتر سمیه میرزاده

جلسه اول غیر حضوری (۱۲ اسفند ۱۳۹۸)

2.4 Finite Dimensional Normed Spaces and Subspaces

در این بخش دو خاصیت مهم از فضاها و زیرفضاهای نرم دار متناهی البعد بیان واثبات می شود:

- هر فضا (زیرفضای) نرم دار متناهی البعد تام و در نتیجه بسته است.
- همه ی نرم های روی یک فضای نرم دار متناهی البعد با هم معادل می باشند.

لم ۱-۴-۲: فرض کنید $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ یک مجموعه‌ی مستقل خطی از بردارها در فضای نرم‌دار X (با هر بعدی) باشد. در اینصورت یک عدد $c>0$ وجود دارد بطوریکه برای هر $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ داریم:

$$\|\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|). \qquad (I)$$

اثبات: قرار دهید $S := |\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_n|$. اگر $S=0$، آنگاه $\alpha_j = 0$ به ازای هر $j = 1, \ldots, n$. پس رابطه (I) برای هر c ای برقرار می‌باشد.

- فرض کنید $s>0$. رابطه (I) را بر s تقسیم کنید، در نتیجه

$$\frac{1}{s}\|\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\cdots+\alpha_n x_n\|\geq c$$

$$\Longrightarrow \left\|\frac{\alpha_1}{s}x_1+\frac{\alpha_2}{s}x_2+\cdots+\frac{\alpha_n}{s}x_n\right\|\geq c \quad (\text{II})$$

قرار دهید $\beta_j:=\frac{\alpha_j}{s}$ به ازای هر $j=1,\ldots,n$، در اینصورت

$$\sum_{j=1}^{n}|\beta_j|=\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\alpha_j}{s}\right|=\frac{1}{s}\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|=\frac{s}{s}=1.$$

لذا رابطه (II) به رابطه‌ی زیر تبدیل می شود:

$$\|\beta_1 x+\cdots+\beta_n x_n\|\geq c,\quad \left(\sum_{j=1}^{n}|\beta_j|=1\right) \quad (\text{III})$$

بنابراین رابطه (I) با رابطه‌ی (III) معادل می باشد.

پس کافی است اثبات شود که یک $c>0$ وجود دارد بطوریکه رابطه

(III) برای هر n-تایی $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ که $\sum_{j=1}^{n} |\beta_j| = 1$ برقرار می‌باشد.

برای این منظور، با برهان خلف فرض کنید چنین نباشد، لذا به ازای هر

$(m \in \mathbb{N})$ $c = \frac{1}{m}$، n-تایی $\beta_1^{(m)}, \beta_2^{(m)}, \cdots, \beta_n^{(m)}$ وجود دارد بطوریکه

$$\|\beta_1^{(m)} x_1 + \cdots + \beta_n^{(m)} x_n\| < \frac{1}{m} \quad \text{و} \quad \sum_{j=1}^{n} |\beta_j^{(m)}| = 1 .$$

قرار دهید $y_m := \beta_1^{(m)} x_1 + \cdots + \beta_n^{(m)} x_n$. پس یک دنباله $\{y_m\}$ داریم

بطوریکه

$$\|y_m\| < \frac{1}{m} \quad ; \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \quad \|y_m\| \longrightarrow 0 \quad \text{as } m \longrightarrow \infty .$$

چون $\sum_{j=1}^{n} |\beta_j^{(m)}| = 1$ ، لذا $|\beta_j^{(m)}| \leq 1$ به ازای هر j و m .

حال j را ثابت در نظر بگیرید، در اسفنور دنباله

$$(\beta_j^{(m)}) = (\beta_j^{(1)}, \beta_j^{(2)}, \beta_j^{(3)}, \ldots, \beta_j^{(m)}, \ldots)$$

کراندار است. پس بنابر قضیه‌ای از آنالیز، دنباله کراندار $\{\beta_1^{(m)}\}$ دارای یک زیردنباله‌ی همگرا مانند $\{\lambda_1^{(m)}\}$ است. فرض کنید $\lambda_1^{(m)} \longrightarrow \beta_1$ و

$$y_{1,m} := \lambda_1^{(m)} x_1$$

، در اینصورت $\{y_{1,m}\}$ زیردنباله‌ای از $\{y_m\}$ است.

حال بحث به‌کار رفته برای دنباله $\{\beta_1^{(m)}\}$ را برای دنباله $\{\beta_2^{(m)}\}$ به کار ببرید و به طور مشابه دنباله $\{\beta_2^{(m)}\}$ دارای یک زیردنباله‌ی همگرا مانند $\{\lambda_2^{(m)}\}$ است، فرض کنید $\lambda_2^{(m)} \longrightarrow \beta_2$. قرار دهید $y_{2,m} := \lambda_1^{(m)} x_1 + \lambda_2^{(m)} x_2$. در اینصورت $\{y_{2,m}\}$ زیردنباله‌ای از $\{y_m\}$ است.

این روند را ادامه دهید، بعد از n مرحله، یک زیردنباله

$$(y_{n,m}) = (y_{n,1}, y_{n,2}, \ldots, y_{n,m}, \ldots)$$

از دنباله $\{y_m\}$ بدست می آید که

$$y_{n,m} = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^{(m)} x_j \quad \text{و} \quad \sum_{j=1}^{n} |\gamma_j^{(m)}| = 1$$

و $\beta_j \longleftarrow \gamma_j^{(m)}$ هنگامی که $m \to \infty$. بنابراین هنگامی که $m \to \infty$

داریم:

$$\sum_{j=1}^{n} |\beta_j| = 1 \text{ و } y_{n,m} \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j .$$

قرار دهید $y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j$. چون $\sum_{j=1}^{n} |\beta_j| = 1$ ، لذا همه β_j ها صفر نیستند، پس $y \neq 0$ ، چون اگر $y = 0$ ، در اینصورت از آنجا که مجموعه $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ مستقل خطی است، پس همه ی β_j ها صفراند که این تناقض است.

از طرف دیگر $y_{n,m} \longrightarrow y$ پس $\|y_{n,m}\| \longrightarrow \|y\|$

(چون $\|\cdot\|$ تابعی پیوسته است). چون $\|y_m\| \longrightarrow 0$ و $\{y_{n,m}\}$

زیر دنباله‌ای از $\{y_m\}$ است پس $\|y_{n,m}\| \longrightarrow 0$، لذا $\|y\| = 0$

یعنی $y = 0$ و اینکه با $y \neq 0$ در تناقض است، لذا فرض خلف

باطل و حکم برقرار است. ■

2.4-2 Theorem (Completeness). *Every finite dimensional subspace Y of a normed space X is complete. In particular, every finite dimensional normed space is complete.*

Proof. We consider an arbitrary Cauchy sequence (y_m) in Y and show that it is convergent in Y; the limit will be denoted by y. Let $\dim Y = n$ and $\{e_1, \cdots, e_n\}$ any basis for Y. Then each y_m has a unique representation of the form

$$y_m = \alpha_1^{(m)} e_1 + \cdots + \alpha_n^{(m)} e_n.$$

Since (y_m) is a Cauchy sequence, for every $\varepsilon > 0$ there is an N such that $\|y_m - y_r\| < \varepsilon$ when $m, r > N$. From this and Lemma 2.4-1 we have for some $c > 0$

$$\varepsilon > \|y_m - y_r\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} (\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}) e_j\right\| \geqq c \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}|,$$

where $m, r > N$. Division by $c > 0$ gives

همیشه

$$|\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}| \leqq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}| < \frac{\varepsilon}{c} \qquad (m, r > N).$$

This shows that each of the n sequences

$$(\alpha_j^{(m)}) = (\alpha_j^{(1)}, \alpha_j^{(2)}, \cdots) \qquad j = 1, \cdots, n$$

is Cauchy in $\mathbf{R}$ or $\mathbf{C}$. Hence it converges; let α_j denote the limit. Using these n limits $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, we define

$$y = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n.$$

Clearly, $y \in Y$. Furthermore,

$$\|y_m - y\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j^{(m)} - \alpha_j) e_j \right\| \leqq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j| \, \|e_j\|.$$

On the right, $\alpha_j^{(m)} \longrightarrow \alpha_j$. Hence $\|y_m - y\| \longrightarrow 0$, that is, $y_m \longrightarrow y$. This shows that (y_m) is convergent in Y. Since (y_m) was an arbitrary Cauchy sequence in Y, this proves that Y is complete. ∎

From this theorem and Theorem 1.4-7 we have

2.4-3 Theorem (Closedness). *Every finite dimensional subspace Y of a normed space X is closed in X.*

Note that infinite dimensional subspaces need not be closed. *Example.* Let $X = C[0, 1]$ and $Y = \text{span}(x_0, x_1, \cdots)$, where $x_j(t) = t^j$, so that Y is the set of all polynomials. Y is not closed in X. (Why?)

2.4-4 Definition (Equivalent norms). A norm $\|\cdot\|$ on a vector space X is said to be *equivalent* to a norm $\|\cdot\|_0$ on X if there are positive numbers a and b such that for all $x \in X$ we have

$$a\|x\|_0 \leqq \|x\| \leqq b\|x\|_0. \tag{3}$$

∎

Equivalent norms on X define the same topology for X.

2.4-5 Theorem (Equivalent norms). *On a finite dimensional vector space X, any norm $\|\cdot\|$ is equivalent to any other norm $\|\cdot\|_0$.*

Proof. Let $\dim X = n$ and $\{e_1, \cdots, e_n\}$ any basis for X. Then every $x \in X$ has a unique representation

$$x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n.$$

By Lemma 2.4-1 there is a positive constant c such that

$= \|\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n\|$

$$\|x\| \geqq c(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|).$$

$\|x_0\| \leq k \sum |\alpha_j| \leq \frac{k}{c} \|x\|$

$\Rightarrow \frac{c}{k} \|x_0\| \leq \|x\|$

On the other hand the triangle inequality gives

$$\|x\|_0 \leqq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| \|e_j\|_0 \leqq k \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|, \qquad k = \max_j \|e_j\|_0.$$

Together, $a\|x\|_0 \leqq \|x\|$ where $a = c/k > 0$. The other inequality in (3) is now obtained by an interchange of the roles of $\|\cdot\|$ and $\|\cdot\|_0$ in the preceding argument. ∎

پایان

با تشکر