انتگرال های ناسره

یادآوری: برای انتگرال معین $\int_a^b f(x)\,dx$ دیدیم که $I=[a,b]$ یک بازه بسته و $f(x)$ روی این بازه بسته تعریف شده بود (بهتر بود پیوسته باشد).

حال اگر بازه I بسته نباشد و یا اینکه تابع $f(x)$ روی I ناپیوسته باشد آنگاه $\int_a^b f(x)\,dx$ تعریف می‌شود یا خیر؟

جواب: چنین انتگرال های معینی را انتگرال ناسره می‌نامیم (یعنی بازه I بسته نباشد و یا $f(x)$ روی بازه I (بسته یا باز) دارای برخی از نقاط ناپیوستگی باشد)

و برای حل انتگرال ناسره، انتگرال ناسره را به دو نوع تقسیم بندی می‌کنیم.

نوع اول انتگرال ناسره: بازه بسته نباشد (کراندار نباشد).

تعریف: انتگرال ناسره نوع اول: (بازه بسته نیست)

الف) اگر به ازای هر عدد مانند t که $t \geq a$ انتگرال $\int_a^t f(x)\,dx$ وجود داشته باشد (یعنی تابع f روی $[a,t]$ تعریف شده است (بهتر است f پیوسته باشد)) آنگاه

$$\boxed{\text{یعنی } I=[a,+\infty)} \quad \int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx$$

به شرطی که حد بالا موجود باشد (یعنی عدد باشد)

ب) اگر به ازای هر عدد مانند t که $t \leq b$ انتگرال $\int_t^b f(x)\,dx$ موجود باشد آنگاه

$$\boxed{\text{یعنی } I=(-\infty,b]} \quad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx$$

به شرطی که حد بالا موجود باشد (یعنی عدد باشد)

صفحه ۲

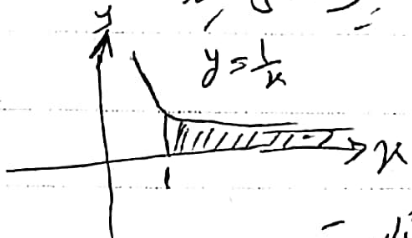
انتگرال نامسره $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ و $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ را همگرا نامیم به شرطی که حدهای قبل موجود باشند و اگر حدهای قبل موجود نباشند (عدد نباشند) این دو انتگرال نامسره را واگرا می‌نامیم.

ج) اگر $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ و $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ هر دو همگرا باشند آنگاه

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

که در آن a عدد حقیقی دلخواه می‌تواند باشد

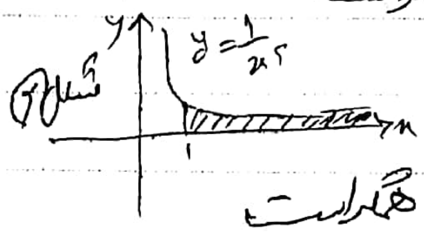
مثال ۱) همگرایی و یا واگرایی انتگرال‌های زیر را بررسی کنید و آنها را تعبیر هندسی کنید



الف) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ و $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ شکل ۱

حل

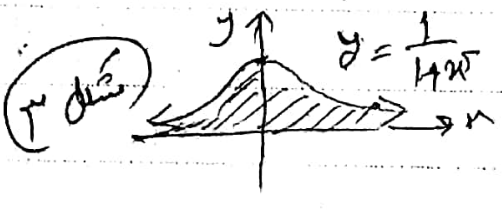
$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\left[\ln x\right]_1^{b} = \lim_{b\to+\infty}\ln b = +\infty$$ واگراست



$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{b} = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{b}+1\right] = 1$$ همگراست

تعبیر $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ یعنی مساحت زیر منحنی $y=\frac{1}{x}$ در فاصله $[1,+\infty)$ خیلی بزرگ است

و $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ یعنی مساحت زیر منحنی $y=\frac{1}{x^2}$ در فاصله $[1,+\infty)$ برابر یک واحد مربع است طبق دو شکل بالا.



ب) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$

حل ب) چون $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ پس

عدد صفر برای راحتی (و قرینه بودن شکل $y=\frac{1}{1+x^2}$) انتخاب شده است.

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\left[\tan^{-1}x\right]_{a}^{0} = -\lim_{a\to-\infty}\tan^{-1}a = -\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$$

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\left[\tan^{-1}x\right]_{0}^{b} = \lim_{b\to+\infty}\tan^{-1}b = \frac{\pi}{2}$$

بنابراین $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$ یعنی مساحت شکل (هاشور خورده) برابر π است.

تعریف انتگرال ناسره نوع دوم [تابع $f(x)$ روی بازه داده شده ناپیوسته است]

فرض کنید که تابع $f(x)$ روی بازه I در نقطه $x=c$ ناپیوسته شود و $\lim_{x\to c}|f(x)| = +\infty$ یا عبارت دیگر $x=c$ مجانب قائم نمودار $f(x)$ باشد در این صورت هر سه نمونه انتگرال زیر

$\int_{c}^{b} f(x)\,dx$ (f روی $(c,b]$ پیوسته) و $\int_{a}^{c} f(x)\,dx$ (f روی $[a,c)$ پیوسته).

و $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ (f روی بازه $[a,b]$ بجز در $x=c$ پیوسته است)

یا انتگرال های ناسره نوع دوم معروف هستند و با صورت زیر تعریف می شوند

الف) $\int_{c}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to c^{+}}\int_{t}^{b} f(x)\,dx$ به شرطی که حد موجود باشد.

ب) $\int_a^c f(x)\,dx = \lim\limits_{t\to c^-}\int_a^t f(x)\,dx$ درصورتی که حد وجود دارد

انتگرال های ناسره $\int_a^c f(x)dx$ و $\int_c^b f(x)dx$ همگراست هرگاه حدهای متناظر آنها موجود باشد و در غیر این صورت آنها را واگرا می نامیم

ج) اگر f در c ناپیوسته باشد $a<c<b$ و $\int_a^c f(x)dx$ و $\int_c^b f(x)dx$ هر دو همگرا باشد آنگاه

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$ همگراست.

مثال ۲: همگرایی و واگرایی انتگرال های زیر را بررسی کنید.

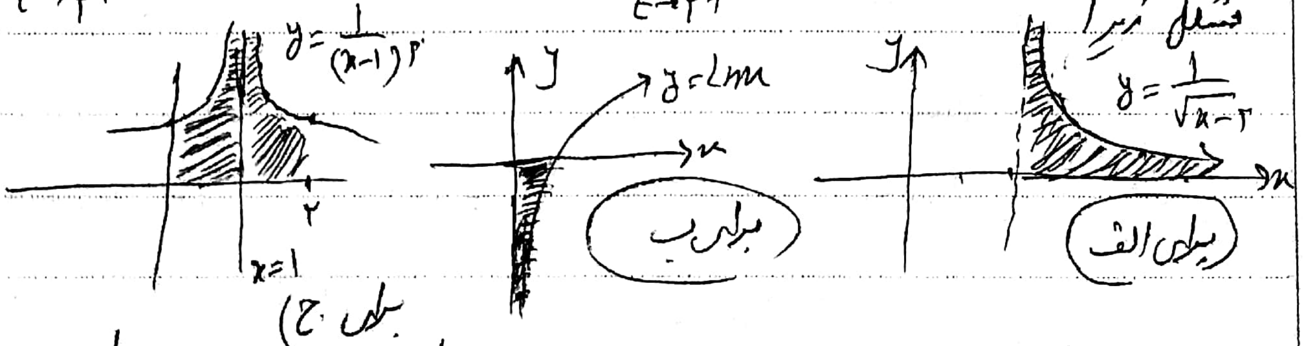
الف) $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$ ب) $\int_0^1 \ln x\,dx$ ج) $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$ ...

حل

الف) $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \lim\limits_{t\to 2^+}\int_t^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \lim\limits_{t\to 2^+}\left[2\sqrt{x-2}\right]_t^5 =$ تابع $f(x)$ در $x=2$ ناپیوسته است

$= \lim\limits_{t\to 2^+}\left[2\sqrt{3} - 2\sqrt{t-2}\right] = 2\sqrt{3} - \lim\limits_{t\to 2^+} 2\sqrt{t-2} = 2\sqrt{3} - 0 = 2\sqrt{3}$

شکل زیر



ب) $\int_0^1 \ln x\,dx = \lim\limits_{t\to 0^+}\int_t^1 \ln x\,dx \xrightarrow{\text{طبق جزء به جزء}} \lim\limits_{t\to 0^+}\left[x\ln x - x\right]_t^1 =$

$$= \lim_{t\to 0^+}\left[-1 - t\ln t + t\right] \overset{*\text{طبق}}{=} -1-0+0 = -1$$ پس انتگرال ناسره همگراست

$u = \ln x \qquad dx = dv$

$du = \frac{dx}{x} \qquad x = v$

$$\int \ln x\, dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + c$$

$$* \lim_{t\to 0^+} t\ln t = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln t}{\frac{1}{t}} \overset{Hop}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{1}{t}}{\frac{-1}{t^2}} = -\lim_{t\to 0^+} t = 0$$

ج) $$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} + \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \ldots$$ واگراست

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{t\to 1^-}\left[\frac{-1}{t-1}\right]_0^t = -\lim_{t\to 1^-}\frac{1}{t-1} + 1 = +\infty$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{t\to 1^+} \int_t^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{t\to 1^+}\left[\frac{-1}{x-1}\right]_t^2 = -1 + \lim_{t\to 1^+}\frac{1}{t-1} = +\infty$$

آزمون مقایسه برای انتگرال های ناسره

محاسبه برخی از انتگرال های ناسره ممکن است سخت باشد ولی همگرایی و یا واگرایی این انتگرال ها مهم است این کار با آزمون مقایسه قابل حل است. این آزمون برای انتگرال ناسره نوع اول را با یک قضیه بیان می کنیم و قضیه مشابه آن برای انتگرال ناسره نوع دوم هم درست است.

قضیه (آزمون مقایسه) فرض کنید که توابع $f(x)$ و $g(x)$ روی $[a,+\infty)$ پیوسته باشند و برای $x \geq a$: $f(x) \geq g(x) \geq 0$

الف) اگر $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ همگرا باشد آنگاه $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ همگراست

ب) اگر $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ واگرا باشد آنگاه $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ نیز واگراست

مثال ۳: نشان دهید که $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ همگرا است [در ریاضی ۲ یاد می‌گیرید که $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$]

حل:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\int_0^1 e^{-x^2}dx+\int_1^{+\infty}e^{-x^2}dx$$

انتگرال $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ انتگرال معین معمولی است و همگرا است (هر چند که حل آن آسان نیست)

برای انتگرال ناسره $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$ از آزمون مقایسه استفاده می‌کنیم

$$\forall x\ge 1:\ x^2\ge x \Rightarrow -x^2\le -x \Rightarrow e^{-x^2}\le e^{-x}$$

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b e^{-x}dx=-\lim_{b\to+\infty}\left[e^{-x}\right]_1^b=-\lim_{b\to+\infty}e^{-b}+e^{-1}=0+e^{-1}=\frac{1}{e}$$

زیرا $\lim_{b\to+\infty} e^{-b}=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^b}=0$

بنابراین طبق آزمون مقایسه چون $\int_1^{+\infty}e^{-x}dx$ همگرا است پس (چون $0\le e^{-x^2}\le e^{-x}$) انتگرال

$\int_1^{+\infty}e^{-x^2}dx$ همگرا است و در کل انتگرال $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$ همگرا است

مثال ۴: نشان دهید که $\int_1^{+\infty}\frac{1+e^{-x}}{x}dx$ واگرا است.

حل: چون $\frac{1+e^{-x}}{x}>\frac{1}{x}>0$ برای $x\ge 1$ و انتگرال $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ واگرا است بنابراین طبق آزمون مقایسه $\int_1^{+\infty}\frac{1+e^{-x}}{x}dx$ واگرا است

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\left[\ln x\right]_1^b=\lim_{b\to+\infty}\ln b-\underbrace{\ln 1}_{0}=+\infty$$