جلسه اول سال ۹۹

حل

# رابطه و تابع

## ۱- حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه:

**تعریف زوج مرتب:** برای هر دو شئ دلخواه $a$ و $b$ شئ جدید $(a,b)$ را زوج مرتب (جفت مرتب) $a$ و $b$ می نامیم و کلمه مرتب یعنی ترتیب در این شئ مهم است و $a$ را مؤلفه اول و $b$ را مؤلفه دوم این

زوج مرتب می باشد زوج $(b,a)$ با زوج $(a,b)$ باهم فرق دارد در ا الّا اینکه $a=b$ باشد که در این صورت هر دو زوج به یک زوج $(a,a)$ تبدیل می شود

**برابری دو زوج مرتب:** دو زوج مرتب $(a,b)$ و $(c,d)$ را برابر نامیم و می نویسیم $(a,b)=(c,d)$ هرگاه $a=c$ و $b=d$ یعنی مؤلفه های نظیر به نظیر این دو زوج باهم برابر باشند.

**توجه:** زوج مرتب $(a,b)$ را با بازه باز $(a,b)$ یکی نباید گرفت زیرا بازه باز $(a,b)$ یک مجموعه یا به بیان دقیق تر یک فاصله باز از دو عدد حقیقی $a$ و $b$ است ولی زوج مرتب $(a,b)$ یک شئ است و لازم نیست $a$ و $b$ دو عدد حقیقی باشد

**تعریف:** اگر $A$ و $B$ دو مجموعه دلخواه باشند حاصل ضرب دکارتی این دو مجموعه را با $A\times B$ نمایش می دهیم و می خوانیم $A$ ضرب در $B$ و $A\times B$ مجموعه تمام زوج های مرتب $(a,b)$ هستند که مؤلفه اول $a$ از $A$ و مؤلفه دوم $b$ از $B$ گرفته شده است یعنی

$$(a,b)\in A\times B \equiv a\in A \wedge b\in B$$

به عبارت دیگر

$$A\times B=\{(a,b) \mid a\in A \wedge b\in B\}$$

$$B\times A=\{(b,a) \mid b\in B ,\ a\in A\}$$

توجه: برای دو مجموعه $A$ و $B$ داریم:

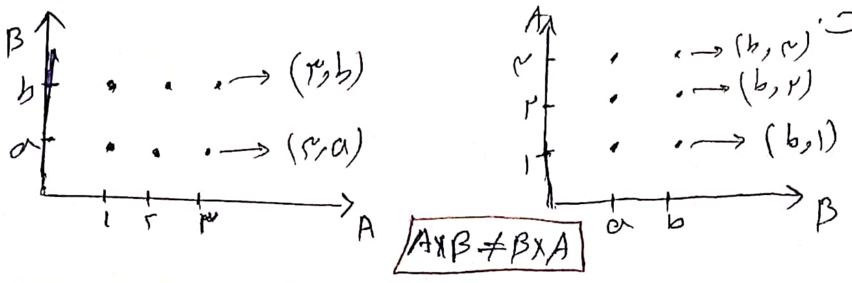
مثال ۱: اگر $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{a,b\}$ آنگاه مجموعه های $A\times B$ و $B\times A$ را بدست آورید

حل:

$$A\times B=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$$

$$B\times A=\{(a,1),(b,1),(a,2),(b,2),(a,3),(b,3)\}$$

در این مثال اگر $A$ را یک محور و $B$ را محور دیگری که بر محور $A$ عمود است در نظر بگیریم نمودار $A\times B$ و $B\times A$ به صورت زیر است:




$\boxed{A\times B\neq B\times A}$

سوال: در چه صورت $B\times A = A\times B$

جواب: ۱- دو مجموعه $A$ و $B$ باهم مساوی باشند یعنی $A=B$ که در این صورت $A\times B = B\times A$

۲) زمانی که یکی از دو مجموعه $A$ و $B$ تهی باشد که در این صورت:

$A=\phi \Rightarrow \phi\times B=\phi$ و $B=\phi \Rightarrow A\times\phi=\phi$ ،

دلیل: $A\times\phi=\phi$؛ مجموعه $A\times\phi$ مجموعه تمام زوج های مرتب $(a,b)$ است که $a\in A$ و $b\in\phi$

حال چون مجموعه $\phi$ (تهی) هیچ عضوی ندارد پس عضوی مانند $b$ در $\phi$ پیدا نمی شود که بتوان زوج مرتب $(a,b)$ را ساخت لذا $A\times\phi=\phi$. به همین صورت می توان نشان داد که $\phi\times A=\phi$.

قضیه ۱: اگر $A$ و $B$ و $C$ سه مجموعه باشند آنگاه

الف) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$ (اثبات الف در کتاب وجود دارد)

ب) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

اثبات (ب)

$\forall(a,x)\in A\times(B\cup C) \overset{\text{تعریف}}{\equiv} a\in A \wedge x\in(B\cup C) \underset{\text{اجتماع}}{\overset{\text{تعریف}}{\equiv}}$

$a\in A\wedge(x\in B \vee x\in C) \underset{\text{پذیری}}{\overset{\text{شرکت}}{\equiv}} (a\in A\wedge x\in B)\vee(a\in A\wedge x\in C) \overset{\text{تعریف}}{\equiv}$

$(a,x)\in A\times B \vee (a,x)\in A\times C \underset{\text{اجتماع}}{\overset{\text{تعریف}}{\equiv}} (a,x)\in[(A\times B)\cup(A\times C)]$

بنابراین $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

قضیه ۲: اگر $A$ و $B$ و $C$ سه مجموعه باشند آنگاه $A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$

اثبات:

$\forall(a,x)\in[A\times(B-C)] \overset{\text{تعریف}}{\equiv} a\in A\wedge x\in(B-C) \underset{\text{تفاضل}}{\overset{\text{تعریف}}{\equiv}}$

$a\in A\wedge[x\in B\wedge x\notin C] \overset{\text{خودتوانی}}{\equiv} [a\in A\wedge a\in A]\wedge(x\in B\wedge x\notin C] \underset{\text{شرکت پذیری}}{\overset{\text{جابجایی}}{\equiv}}$

$[a\in A\wedge x\in B]\wedge[a\in A\wedge x\notin C] \overset{\text{تعریف}}{\equiv} (a,x)\in A\times B\wedge(a,x)\notin(A\times C)$

$\underset{\text{تفاضل}}{\overset{\text{تعریف}}{\equiv}} (a,x)\in[A\times B - A\times C]$

توجه: طبق قضیه ۱ و ۲ ضرب دکارتی روی اشتراک و اجتماع و تفاضل توزیع پذیر است. یعنی این دو قضیه خاصیت توزیع پذیری حاصل ضرب دکارتی روی اشتراک و اجتماع و تفاضل را بیان می کنند

سوال: آیا اشتراک و اجتماع و تفاضل هم روی حاصل ضرب دکارتی توزیع پذیر است با عبارت دیگر
برای سه مجموعه $A$ و $B$ و $C$ آیا سه تساوی زیر برقرار هستند

الف) $A\cap(B\times C)=(A\cap B)\times(A\cap C)$

ب) $A\cup(B\times C)=(A\cup B)\times(A\cup C)$ ⟶ (تمرین ۱۳ کتاب ص ۹۱)

ج) $A-(B\times C)=(A-B)\times(A-C)$

جواب: در حالت کلی این تساوی درست نیستند و به کمک مثال نقیض نادرستی آنها را بررسی می کنیم.

با انتخاب $A$ و $B$ و $C$ به صورت: $A=\{1\}$ و $B=\{1\}$ ، $C=\{1\}$

داریم:

$B\times C=\{(1,1)\}\Rightarrow A\cap(B\times C)=A\cap\{(1,1)\}=\phi$ ①

$A\cap B=\{1\}$ ، $A\cap C=\{1\}\Rightarrow(A\cap B)\times(A\cap C)\}=\{(1,1)\}$ ②

$\Rightarrow$ ①② $\Rightarrow\phi\neq\{(1,1)\}\Rightarrow A\cap(B\times C)\neq(A\cap B)\times(A\cap C)$

پس الف نادرست است ، برای قسمت (ج): $A=\{1\}$ و $B=C=\phi$ انتخاب می کنیم پس

$B\times C=\phi\times\phi=\phi\Rightarrow A-(B\times C)=A-\phi=A=\{1\}$

$A-B=A-\phi=A$ ، $A-C=A-\phi=A\Rightarrow(A-B)\times(A-C)=\{(1,1)\}$

پس $A-(B\times C)\neq(A-B)\times(A-C)$

قسمت (ب) تمرین ۱۳ کتاب است

---

مثال ۲
تمرین ۱۵ را به عنوان مثال حل می کنیم: آیا تساوی $(A\times B)\cup(C\times D)=(A\cup C)\times(B\cup D)$
درست است؟ (صفحه ۹۱)

حل: با مثال نقیض این تساوی نادرست است: با انتخاب $D=A=\phi$ و $C=\{1\}=B$

$A\times B=\phi\times B=\phi$ ، $C\times D=C\times\phi=\phi\Rightarrow(A\times B)\cup(C\times D)=\phi\cup\phi=\phi$

$A\cup C=\phi\cup C=C$ ، $B\cup D=B\cup\phi=B\Rightarrow(A\cup C)\times(B\cup D)=C\times B=\{(1,1)\}$

پس $(A\times B)\cup(C\times D)\neq(A\cup C)\times(B\cup D)$

---

حل تمرین ۸ کتاب: درستی و یا نادرستی هر یک از احکام زیر را ثابت کنید. (صفحه ۶۷)

الف) $A\times B\subseteq C\times D \Longleftrightarrow A\subseteq C$ و $B\subseteq D$.

ب) $P(A\times B)=P(A)\times P(B)$

اثبات: الف) نادرست است زیرا با فرض $A=\phi=D$ و $B=\{1\}$ و $C=\{2\}$

در این صورت از یک طرف داریم: $\underbrace{A\times B}_{\phi}\subseteq\underbrace{C\times D}_{\phi}\Rightarrow\phi\subseteq\phi$

که عبارت درستی است از طرف دیگر

که $A\subseteq C$ یعنی ($\phi\subseteq\{2\}$ درست است) $B\subseteq D$ یعنی $\{1\}\subseteq D$ که نادرست است هر چند

ولی گزاره

$(A\subseteq C$ و $B\subseteq D)\Longrightarrow(A\times B)\subseteq(C\times D)$ درست است و اثبات آن به صورت زیر است:

$$\forall(a,b)\in A\times B\equiv a\in A, b\in B \xrightarrow{\text{طبق فرض}} a\in C, b\in D\Rightarrow(a,b)\in C\times D$$

پس $A\times B\subseteq C\times D$

ب) هم نادرست است، زیرا اگر $A=\{1\}$ و $B=\phi$ انتخاب کنیم آنگاه

$$P(A)=\{\phi,\{1\}\} \text{ و } P(\phi)=\{\phi\} \text{ و } A\times\phi=\phi$$

$$P(A\times B)=P(A\times\phi)=P(\phi)=\{\phi\} \quad (1)$$

$$P(A)\times P(B)=\{\phi,\{1\}\}\times\{\phi\}=\{(\phi,\phi),(\{1\},\phi)\} \quad (2)$$

چون $(1)\neq(2)$ پس $P(A\times B)\neq P(A)\times P(B)$

حل تمرین ۱۲: ثابت کنید که $(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$ (صفحه ۶۸ و تمرین ۹ صفحه ۶۷)

با عضوگیری ثابت می‌کنیم:

$$\forall(x,y)\in[(A\times B)\cap(C\times D)]\overset{\text{تعریف اشتراک}}{\equiv}(x,y)\in(A\times B)\wedge(x,y)\in(C\times D)\overset{\text{تعریف ضرب دکارتی}}{\equiv}$$

$$[x\in A\wedge y\in B]\wedge(x\in C\wedge y\in D]\overset{\text{جابجایی و شرکت‌پذیری}}{\equiv}[x\in A\wedge x\in C]\wedge[y\in B\wedge y\in D]$$

$$\overset{\text{تعریف اشتراک}}{\equiv}[x\in(A\cap C)]\wedge[y\in(B\cap C)]\overset{\text{تعریف ضرب دکارتی}}{\equiv}(x,y)\in[(A\cap C)\times(B\cap C)]$$

مرش

## ۲ - رابطه

تعریف: اگر $A$ و $B$ دو مجموعه باشند هر زیر مجموعه $A\times B$ را یک رابطه از $A$ در $B$ می نامیم، معمولاً رابطه های از $A$ به $B$ را با $R$ ، $S$ ، $T$ و ... نمایش می دهیم. پس اگر $R$ یک رابطه از $A\times B$ باشد آنگاه $R\subseteq A\times B$. همچنین بجای $(a,b)\in R$ می توان نوشت $aRb$ و می خوانیم $a$ با $R$ به $b$ مربوط است.

توجه: طبق تعریف بالا چون $\phi\subseteq A\times B$ و $A\times B\subseteq A\times B$ بنابراین $\phi$ و $A\times B$ دو رابطه از $A$ به $B$ می باشند.

مثال ۱: اگر $B=\{2\}$ و $A=\{1,3\}$ آنگاه چند رابطه از $A$ به $B$ وجود دارد؟ تمام رابطه های موجود را بنویسید.

حل: چون هر رابطه از $A$ به $B$ زیر مجموعه ای از $A\times B$ است پس تعداد زیر مجموعه های $A\times B$ جواب مثال است.

$A\times B=\{(1,2),(3,2)\} \Rightarrow R_1=\phi$ و $R_2=A\times B$ و $R_3=\{(1,2)\}$ و $R_4=\{(3,2)\}$

تبصره: هر رابطه از $A$ به $A$ یعنی هر زیر مجموعه از $A\times A$ از اهمیت خاصی برخوردار است و در این بخش بیشتر به این رابطه ها می پردازیم.

مثال ۲: تمام رابطه های مجموعه دو عضوی $A=\{1,2\}$ را بیابید.

$A\times A=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

حل: کافی است تمام زیر مجموعه های $A\times A$ را بدست آوریم:

پس این رابطه ها عبارتند از $R_1=\phi$ و $R_2=A\times A$ و $R_3=\{(1,1)\}$ و $R_4=\{(1,2)\}$ و

$R_5=\{(2,1)\}$ و $R_6=\{(2,2)\}$ و $R_7=\{(1,1),(1,2)\}$ و $R_8=\{(1,1),(2,1)\}$ و

$R_9=\{(1,1),(2,2)\}$ و $R_{10}=\{(1,2),(2,1)\}$ و $R_{11}=\{(1,2),(2,2)\}$ و $R_{12}=\{(2,1),(2,2)\}$

$R_{13}=\{(1,1),(1,2),(2,1)\}$ و $R_{14}=\{(1,1),(1,2),(2,2)\}$ و $R_{15}=\{(1,1),(2,1),(2,2)\}$

$R_{16}=\{(1,2),(2,1),(2,2)\}$

تعریف: اگر $R$ یک رابطه از $A$ به $B$ باشد (یعنی $R\subseteq A\times B$) در این صورت رابطه وارون $R$ را با $R^{-1}$ نمایش می دهیم و $R^{-1}$ رابطه ای از $B$ به $A$ است (یعنی $R^{-1}\subseteq B\times A$) از نظر منطق

$(a,b)\in R \iff (b,a)\in R^{-1}$

به عبارت دیگر $aRb \iff bR^{-1}a$

مثال ۳: در مثال ۲ (مثال قبل) $R_{15}^{-1}$ و $R_4^{-1}$ و $R_7^{-1}$ و $R_2^{-1}$ را بیابید.

حل: $R_2^{-1}=A\times A=R_2$ و $R_4^{-1}=\{(2,1)\}$ و $R_7^{-1}=\{(1,1),(2,1)\}$ و $R_{15}^{-1}=\{(1,1),(1,2),(2,2)\}$

مثال ۴: الف) اگر $A=\{a,b\}$ و $B=\{x,y,z\}$ و $R\subseteq A\times B$ و $R=\{(a,x),(b,y)\}$ باشد آنگاه
$R^{-1}\subseteq B\times A$ و $R^{-1}=\{(x,a),(y,b)\}$

ب) اگر $R=\{(x,y)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid$ $x$ عدد $y$ را بخش می‌کند $\}$ آنگاه $R^{-1}=\{(y,x)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid$ $y$ مضربی از $x$ است $\}$

تعریف: اگر $R$ یک رابطه‌ای از $A$ به $B$ باشد در این صورت دامنه رابطه $R$ را با $Dom(R)$ و تصویر رابطه $R$ را با $Im(R)$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$Dom(R)=\{a\in A \mid \exists b\in B, (a,b)\in R\}$$

$$Im(R)=\{b\in B \mid \exists a\in A, (a,b)\in R\}$$

بدیهی است که $Dom(R)\subseteq A$ و $Im(R)\subseteq B$. معمولاً به دامنه $R$ حوزه رابطه $R$ نیز گفته می‌شود و به تصویر رابطه $R$ نگاره $R$ نیز گفته می‌شود.

مثال ۵: در مثال ۴ قسمت الف $Dom(R)=A$ و $Im R=\{x,y\}$ و $Dom(R^{-1})=\{x,y\}$
و $Im(R^{-1})=\{a,b\}$ بدیهی است که $Dom(R)=Im(R^{-1})$ و $Im(R)=Dom(R^{-1})$

در تمرین ۴ صفحه ۷۱ خواسته شده که بطور کلی ثابت کنیم که اگر $R$ یک رابطه باشد آنگاه

$$\begin{cases} Dom(R)\neq Im(R^{-1}) \\ Im(R)=Dom(R^{-1}) \end{cases}$$

مثال ۶: اگر $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{4,5,6\}$ و $R=\{(1,4),(1,5),(3,5)\}$ آنگاه
$R^{-1}=\{(4,1),(5,1),(5,3)\}$ و $Dom(R)=\{1,3\}=Im(R^{-1})$
$Im(R)=\{4,5\}=Dom(R^{-1})$

تعریف: فرض کنید که $R$ یک رابطه روی $X$ (یعنی $R$ رابطه‌ای از $X$ به $X$ یا $R\subseteq X\times X$) باشد.

الف) رابطه $R$ را انعکاسی می‌نامیم هرگاه و فقط اگر $\forall x\in X: (x,x)\in R$ ($\forall x\in X, xRx$)

ب) رابطه $R$ متقارن است اگر و فقط اگر $(x,y)\in R \Rightarrow (y,x)\in R$

ج) رابطه $R$ متعدی است اگر و فقط اگر $(x,y)\in R$ و $(y,z)\in R \Longrightarrow (x,z)\in R$

د) $R$ را یک رابطه همارزی روی $X$ است اگر و فقط اگر $R$ انعکاسی و متقارن و متعدی باشد.

تبصره: برای هر مجموعه ناتهی $X$ همواره $R=X\times X$ یک رابطه همارزی روی $X$ است و همچنین $I_X=\{(x,x)\mid x\in X\}$ یک رابطه همارزی روی $X$ است. رابطه همارزی $I_X$ را رابطه قطری یا رابطه همانی روی $X$ می‌نامیم.

توجه: رابطه $I_X$ در کتاب با $\Delta_X$ نمایش داده شده است کوچکترین رابطه همارزی روی $X$ است و $X\times X$ بزرگترین رابطه همارزی روی $X$ است.

مثال ۱۷: الف) روی مجموعه اعداد حقیقی $R$ رابطه تساوی دو عدد حقیقی $(=)$ یک رابطه هم ارزی روی $\mathbb{R}$ است

ب) اگر $X$ مجموعه‌ای از توپ‌های رنگی باشد و $R \subseteq X \times X$ باشد $(a,b) \in R$ اگر و فقط اگر $a$ و $b$ هم رنگ باشند آنگاه $R$ یک رابطه هم ارزی روی $X$ است.

ج) اگر $\mathcal{C}$ = مجموعه تمام مجموعه‌ها باشد و رابطه تساوی بین مجموعه‌ها یک رابطه هم ارزی روی $\mathcal{C}$ است

مثال ۱۸: اگر $X = \{a, b, c\}$ باشد کدام یک از رابطه‌های زیر یک رابطه هم ارزی روی $X$ است

$R_1 = \{(a,a), (b,b), (c,c)\}$ ، $R_2 = \{(a,b), (b,a)\}$

$R_3 = \{(a,b), (b,b), (c,c), (a,b), (b,a)\}$

حل: می‌دانیم که $R_1 = I_X = \Delta_x$ کوچکترین رابطه هم ارزی روی $X$ است انعکاسی بودن $R_1$ بدیهی است و متقارن و متعدی بودن $R_1$ با انتفای مقدم برقرار است زیرا چون $(x,y) \notin R_1$ پس نیازی نداریم پس $(y,x) \in R_1$ پس $R_1$ متقارن است.

$R_2$ متقارن و متعدی است ولی انعکاسی نیست پس رابطه هم ارزی نیست

$R_3$ یک رابطه هم ارزی روی $X$ است چون انعکاسی و متقارن و با انتفای مقدم متعدی است.

مثال ۹: (رابطه همنهشتی روی $Z$) فرض کنید که $m$ یک عدد صحیح مثبت و ثابت دلخواه باشد. رابطه همنهشتی به پیمانه $m$ که با $\equiv$ نمایش می‌دهیم به صورت $x \equiv y \pmod{m}$ اگر و فقط اگر $\exists k \in Z : x - y = km$ تعریف می‌کنیم. نشان می‌دهیم که $\equiv$ یک رابطه هم ارزی روی $\mathbb{Z}$ است

حل. انعکاسی: $x - x = 0 = 0m \ , \ \exists 0 \in Z$

$\forall x \in Z \quad x \equiv x \pmod{m} \iff$

تقارنی (متقارن بودن) فرض کنید که $x \equiv y \pmod{m}$ در این صورت $\exists k \in Z : x - y = km$

بنابراین چون $y - x = (-k)m$ پس $-k \in Z$ پس $y \equiv x \pmod{m}$

خاصیت تعدی: فرض کنید که $x \equiv y \pmod{m}$ و $y \equiv t \pmod{m}$ در این صورت $\exists k_1, k_2 \in Z$

بطوریکه $x - y = k_1 m$ و $y - t = k_2 m$ بنابراین $x = y + k_1 m$ و $t = y - k_2 m$ پس

چون $x - t = (k_1 + k_2)m$ پس $(k_1 + k_2) \in Z$ پس $x \equiv t \pmod{m}$

بنابراین $\equiv$ روی $Z$ یک رابطه هم ارزی است. این رابطه هم ارزی را همنهشتی به مدول (هنگ یا پیمانه) $m$ روی $Z$ می‌نامیم.

مثال ۱۰ (حالت خاص مثال ۹) اگر $m=2$ انتخاب کنیم همنهشتی $x \equiv y \pmod 2$ روی $\mathbb{Z}$ است اگر و فقط اگر $x-y$ زوج باشد $x \equiv y \pmod 2$ اگر و فقط اگر $\exists k \in \mathbb{Z} : x-y=2k$ یعنی $x \equiv y \pmod 2$
به عبارت دیگر $x \equiv y \pmod 2$ اگر و فقط اگر $x$ و $y$ هر دو زوج یا $x$ و $y$ هر دو فرد باشند.

مثال ۱۱ (حل تمرین ۷ صفحه ۷۱) فرض کنید که $R$ یک رابطه روی مجموعه $X$ است. ثابت کنید که

الف) $R$ انعکاسی است اگر و فقط اگر $\Delta_X \subseteq R$.
اثبات: فرض کنید $R$ انعکاسی باشد پس $\forall x \in X \,,\, (x,x) \in R$. بنابراین چون $\Delta_x = I_x$ یک رابطه قطری (همانی) روی $X$ است پس $\Delta_x \subseteq R$ زیرا $\Delta_x = \{(x,x) \mid x \in X\}$
برعکس اگر $\Delta_x \subseteq R$ باشد آنگاه $R$ انعکاسی است زیرا $\forall x \in X : (x,x) \in \Delta_x \subseteq R$
یعنی $\forall x \in X : (x,x) \in R$

ب) $R$ متقارن است اگر و فقط $R = R^{-1}$.
اثبات: فرض کنید که $R$ متقارن باشد پس اگر $(x,y) \in R$ آنگاه $(y,x) \in R$ بنابراین $R = R^{-1}$ زیرا

$$(x,y) \in R \underset{\text{متقارن بودن}}{\equiv} (y,x) \in R \underset{\text{تعریف } R^{-1}}{\equiv} (x,y) \in R^{-1}$$

برعکس: اگر $R = R^{-1}$: اگر $(x,y) \in R$ چون $R = R^{-1}$ پس $(x,y) \in R^{-1}$ بنابراین $(y,x) \in R$ یعنی $R$ متقارن است.

پ) $R$ انعکاسی است اگر و فقط اگر $R^{-1}$ انعکاسی باشد
اثبات: $R$ انعکاسی است $\Longleftrightarrow$ $\forall x \in X \,,\, (x,x) \in R$ یعنی $\forall x \in X : (x,x) \in R^{-1}$ پس $R^{-1}$ انعکاسی است

ت) $R$ متقارن است اگر و فقط $R^{-1}$ متقارن باشد
اثبات: اگر $R$ متقارن باشد طبق ب) $R = R^{-1}$ پس $R^{-1}$ متقارن است (و برعکس هم به همین صورت)

ث) $R$ متعدی است اگر و فقط اگر $R^{-1}$ متعدی باشد
اثبات: فرض کنید که $R$ متعدی باشد و $(x,y)$ و $(y,t) \in R^{-1}$ باشد در این صورت $(t,y)$ و $(y,x) \in R$ حال چون $R$ متعدی است پس $(t,x) \in R$ بنابراین $(x,t) \in R^{-1}$ پس $R^{-1}$ متعدی است
برعکس فرض کنید که $R^{-1}$ متعدی باشد و $(x,y)$ و $(y,t) \in R$ بنابراین $(t,y)$ و $(y,x) \in R^{-1}$ حال چون $R^{-1}$ متعدی است پس $(t,x) \in R^{-1}$ بنابراین $(x,t) \in R$ یعنی $R$ متعدی است

ج) $R$ رابطه هم‌ارزی است اگر و فقط اگر $R^{-1}$ رابطه هم‌ارزی است (طبق ب و پ و ث حکم بدیهی است)

مثال ۱۲ (جواب تمرین ۸ و ۹ صفحه ۷۲) چون تعداد رابطه‌ها از مجموعه $A$ به مجموعه $B$ برابر با تعداد زیرمجموعه‌های $A \times B$ است پس اگر $A$ دارای $n$ عضو و $B$ دارای $m$ عضو باشد تعداد رابطه‌ها از $A$ به $B$ برابر با $2^{n \times m}$ است و همچنین تعداد رابطه‌ها روی مجموعه $n$ عضوی برابر با $2^{n \times n} = 2^{n^2}$ است.