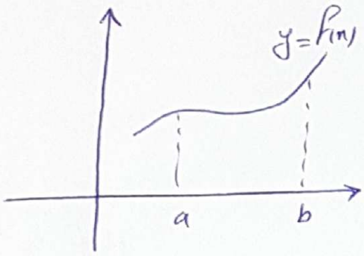
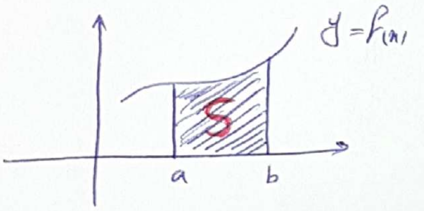
فصل ۵ انتگرال (جلسه اول)

انتگرال بر اساس مفهوم مساحت :

فرض کنید $y=f(x)$ تابع پیوسته و مثبتی در بازه $[a,b]$ باشد. یعنی به عنوان مثال

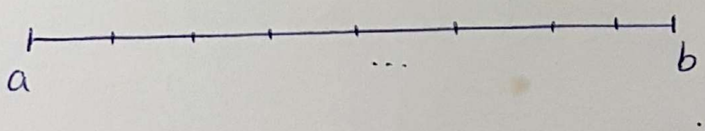


هدف پیدا کردن مساحت زیر منحنی $f(x)$ بالای محور x در محدوده بین خطوط $x=a$ و $x=b$ است. این مساحت را با S نمایش می‌دهیم. پس



اگر ناحیه مذکور شکل هندسی خاصی باشد یا اینکه بتوانیم با تعدادی پاره خط آن ناحیه را به صورت چند شکل هندسی خاص (مانند مستطیل، مثلث و ...) در بیاوریم؛ آن‌گاه برای پیدا کردن S کافیست مساحت آن اشکال هندسی را براساس فرمول‌های مساحتی که دارند بدست بیاوریم و سپس مساحت‌های بدست آمده را باهم جمع بزنیم. اما معمولاً ناحیه‌ای که به دنبال پیدا کردن مساحت آن هستیم نه شکل هندسی خاصی است و نه می‌توان با تعدادی پاره خط آن را به صورت چند شکل هندسی خاص در آورد. لذا در ادامه به دنبال راهکاری خواهیم بود که بتوانیم S یعنی مساحت ناحیه ذکر شده را در حالت کلی بیابیم.

بدین منظور ابتدا فاصله (بازه) $[a,b]$ را به n زیربازه یا n فاصله تقسیم می‌کنیم:



زیربازه یا فاصله را به این صورت نامگذاری می‌کنیم

$x_0 := a$

فاصله اول x_1

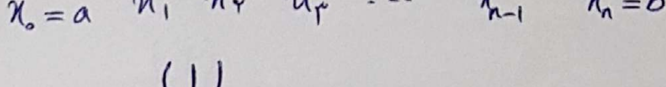
x_2

x_3

$\vdots$

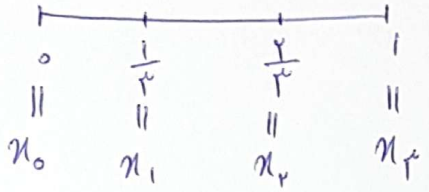
$x_n := b$

لذا

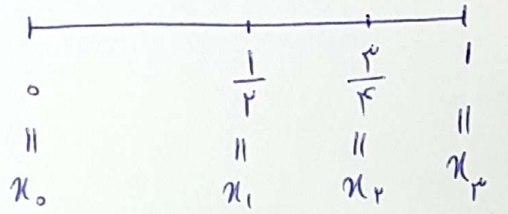


توجه کنید که طول بازه‌ها لزومی ندارد که یکسان باشند.

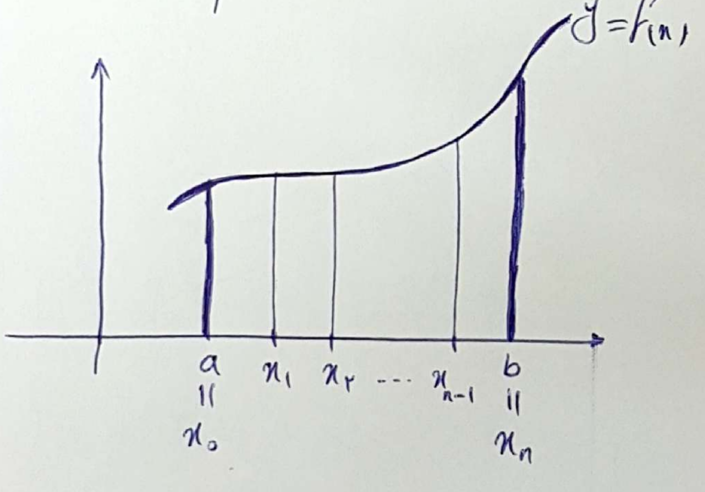
بعنوان مثال بازه $[0,1]$ را به سه قسمت تبدیل می‌کنیم



یا به این شکل



بعد از تقسیم بازه $[a,b]$ به n زیر بازه که به این کار افراز نیز می‌گوییم، خطوطی عمود بر محور x ها در نقاط x_i ها رسم می‌نماییم.



همان‌گونه که مشاهده می‌کنید نواحی مستطیل مانندی زیر تابع $y=f(x)$ بدست می‌آید.

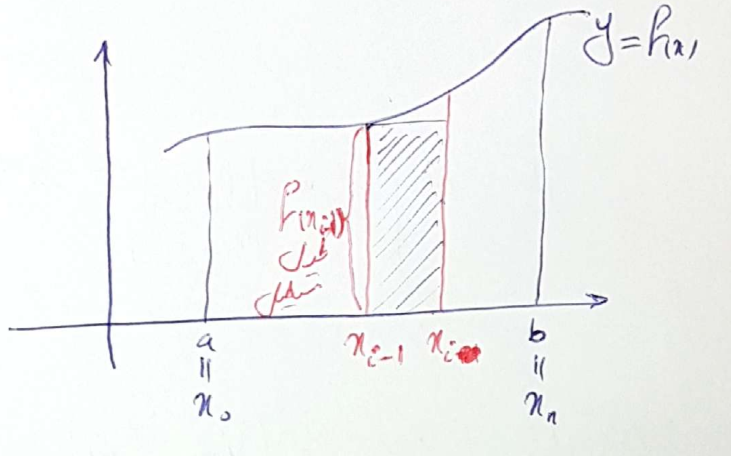
حال کافیست مساحت این n مستطیل را بدست بیاوریم و پس این مساحت‌ها را با هم جمع بزنیم.

اما چند نکته مطرح می‌گردد:

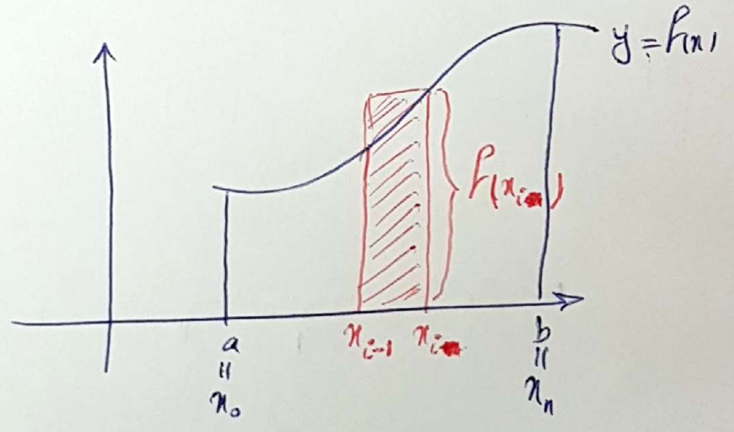
1 این نواحی، دقیقاً مستطیل نیستند، بلکه شبیه مستطیل هستند. لذا برای پیدا کردن طول این مستطیل مانندها، چکار باید انجام دهیم.

برای بدست آوردن طول مستطیل مانندی می توان

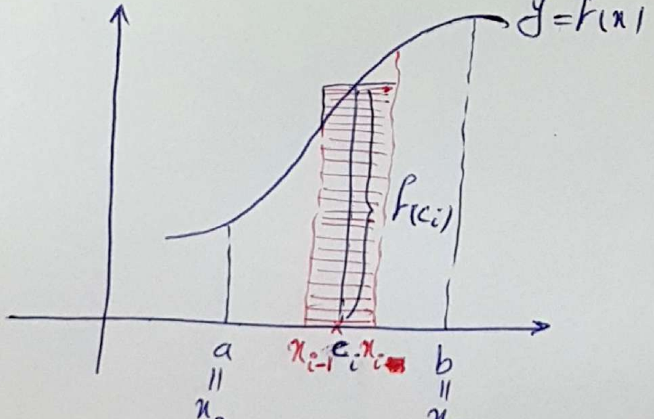
الف) ابتدای بازه $[x_{i-1}, x_i]$ را در نظر گرفت و در این صورت طول مستطیل $f(x_{i-1})$ می گردد



ب) انتهای بازه $[x_{i-1}, x_i]$ را در نظر گرفت و در این صورت طول مستطیل $f(x_i)$ می گردد.



ج) نقطه‌ای دلخواه درون بازه $[x_{i-1}, x_i]$ مانند c_i می توان در نظر گرفت و در این صورت طول مستطیل $f(c_i)$ می گردد



همان گونه که در شکل مشاهده می کنید هیچکدام از مستطیل های بدست آمده، کل آن ناحیه مستطیل مانند را نمی پوشانند. بسته به صعودی، نزولی و یا غیر یکنوا بودن تابع، مساحت مستطیل های بدست آمده در هر کدام از حالات الف تا ج ذکر شده بیشتر، کمتر و یا می تواند نزدیک به مساحت واقعی آن ناحیه مستطیل مانند باشد.

به نظر می رسد اگر در حالت کلی c_i را درون بازه $[x_{i-1}, x_i]$ در نظر بگیریم و طول مستطیل یعنی $f(c_i)$ را بدست آوریم مساحت مستطیل بدست آمده به مساحت ناحیه مستطیل مانند، نزدیکتر می شود. خروجی در این مورد بیشتر صحبت می کنیم.

در هر حالت، عرض این مستطیل $(x_i - x_{i-1})$ خواهد بود که آن را با Δx_i نمایش می دهیم. لذا داریم

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

و در نتیجه

$$\text{مساحت مستطیل } i \text{ ام} \quad S_i = \underbrace{f(c_i)}_{\text{طول}} \times \underbrace{\Delta x_i}_{\text{عرض}}$$

و

$$S = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$$

(مجموع مساحت مستطیل ها)

۲ نکته دوم این که این مستطیل های بدست آمده، همان گونه که اشاره شد لزوماً مساحتشان با مساحت ناحیه مستطیل مانند یکی نیست و بعضاً با توجه به نوع تابع (یکنوا بودن یا نبودن) اختلاف این مساحت ها می تواند زیاد باشد. لذا S بدست آمده در رابطه بالا همیشه مساحت واقعی نیست. حتی ممکن است با مساحت واقعی اختلاف زیادی داشته باشد.

برای رفع این مشکل، با زیاد کردن تعداد مستطیل ها سعی می کنیم مساحت S_i که از رابطه بالا بدست می آید را به مساحت واقعی ناحیه مستطیل مانند نزدیک کنیم. در واقع با زیاد کردن تعداد مستطیل ها، تلاش می کنیم مستطیلی که با عرض Δx_i و طول $f(c_i)$ می سازیم با ناحیه مستطیل مانند آن تقریباً یکی باشد؛ تا مساحت بدست آمده با مساحت واقعی بسیار نزدیک باشد.

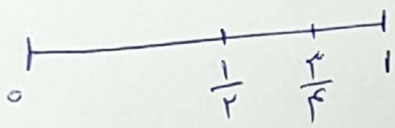
اما سوال اینجاست که آیا با زیاد کردن تعداد مستطیل ها به هدفی که اشاره کردیم می رسیم؟ جواب منفی است.

به این نکته توجه نمائید که مستطیل ها با رسم خطوطی بر محور x ها در نقاط x_i ها بدست می آمدند. لذا برای زیاد کردن تعداد مستطیل ها باید تعداد نقاط x_i را بیشتر کنیم. یعنی مثلاً بازه $[0,1]$ را به جای تقسیم به ۳ فاصله به ۱۰ فاصله یا حتی ۱۰۰ فاصله و یا بیشتر تقسیم کنیم تا تعداد مستطیل ها هم به همان میزان زیاد گردد.

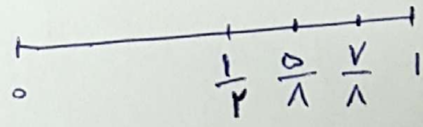
مسلماً زیاد کردن تعداد مستطیل ها تأثیر بسزایی در بدست آوردن مساحت واقعی دارد، لذا هر چه تعداد x_i ها بیشتر باشد مساحت دقیق تر بدست خواهد آمد. اما همانگونه که اشاره شد این یک طرف مسأله است به مثال زیر توجه نمائید.

مثال: بازه $[0,1]$ را به قسمت های مختلف تقسیم می کنیم

(۳ قسمت)

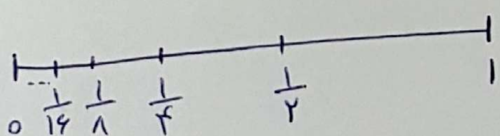


(۴ قسمت)

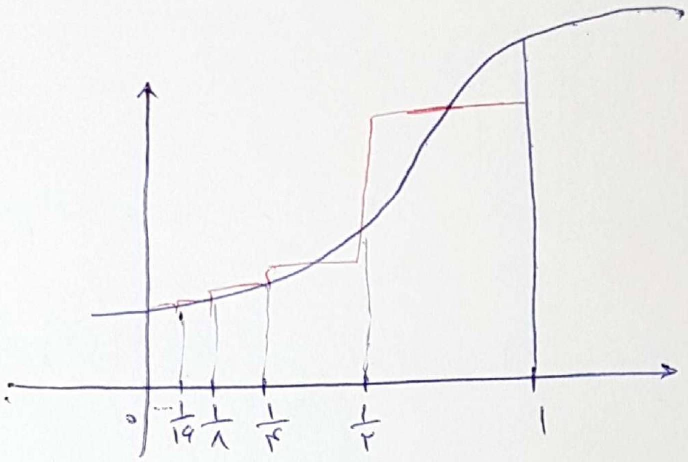


⋮

یا تقسیم بازه $[0,1]$ با کمک فرمول $\frac{1}{2^n}$ که داریم



پس در تشکیل مستطیل ها داریم:



یعنی با زیاد کردن تعداد x_i ها یا به عبارت دیگر با زیاد کردن تعداد مستطیل ها، لزوماً مستطیل های بدست آمده با مستطیل مانند آن ناحیه یکی نمی شوند.

انتظار داشتیم که مستطیل های بدست آمده با مستطیل مانندها بسیار مشابه باشند ولی در بازه [۰,۱] این اتفاق رخ نداد.

دلیل آن این است که افزایش تعداد x_i ها لزوماً در کل بازه [a,b] ممکن است پخش نشوند مانند مثال بالا

و لذا عرض همه مستطیل های بدست آمده کوچک نمی شوند و این خطا محاسبه را بالا می برد.

پس باید به این نکته مهم توجه کنیم که هدف از زیاد کردن تعداد مستطیل ها یا همان x_i ها، کم کردن عرض تمام مستطیل است تا مساحت آن ها با مساحت واقعی ناحیه مستطیل مانند بیشتر نزدیک شوند.

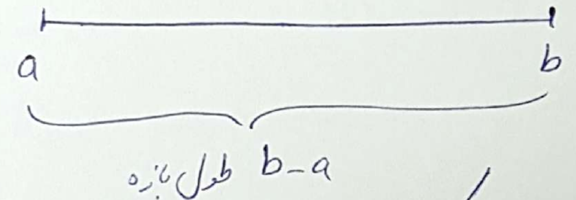
در نتیجه برای بدست آوردن S که داریم

$$S=S_1+S_2+\dots+S_n$$

به جای اینکه ذکر کنیم $n\to+\infty$ (تعداد مستطیل ها را زیاد کنیم)، ذکر می کنیم $\Delta x_i\to 0$ یعنی عرض تمام مستطیل ها کوچک و کوچک تر شود. مسلماً $\Delta x_i\to 0$، $n\to+\infty$ را به همراه خواهد داشت.

(توضیح تکمیلی در فایل صوتی همراه خواهد آمد)

۳ حال این سوال مطرح می‌شود که بر اساس توضیحات صفحه قبل برای میل دادن $\Delta x_i \to 0$ چه فرمولی را برای افراز یا تقسیم بازه $[a,b]$ باید بکار گیریم. از آن جایی که هدف اصلی میل دادن $\Delta x_i \to 0$ یعنی کوچک کردن عرض تمام مستطیل‌ها است (و در واقع به صفر نزدیک شدن عرض تمام مستطیل‌ها) می‌آییم و از ابتدا افراز بازه $[a,b]$ را به n قسمت مساوی انجام می‌دهیم؛ یعنی از همان ابتدا بازه $[a,b]$ را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. لذا وقتی عرض مستطیل‌ها کم می‌شود، عرض تمام آن‌ها با هم کم می‌شود. حال چگونه بازه $[a,b]$ را به n قسمت مساوی تقسیم کنیم؟ بسیار ساده است.

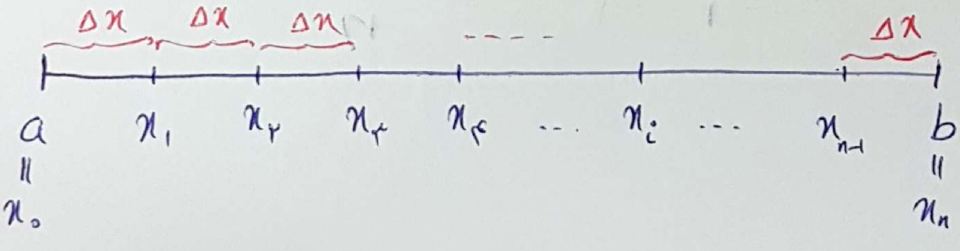


کافیست طول بازه یعنی $b-a$ را به n تقسیم کنیم تا عرض هر مستطیل بدست آید. لذا داریم

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$$ ، برای هر i

که بدلیل یکسان بودن عرض مستطیل‌ها، آن را با Δx نمایش می‌دهیم. پس $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

همچنین داریم



$$x_1 = a + \Delta x$$
$$x_2 = a + 2\Delta x$$
$$x_3 = a + 3\Delta x$$
$$\vdots$$
$$x_i = a + i\Delta x$$
$$\vdots$$
$$x_n = a + n\Delta x$$

در نتیجه

$$S_i = f(c_i)\,\Delta x_i \quad \text{مساحت مستطیل } i\text{ام}$$
$$= f(c_i)\,\Delta x$$
$$= f(c_i)\left(\frac{b-a}{n}\right).$$

یادآوری می‌کنیم $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ و $f(c_i)$ طول مستطیل است.

حال که قصد داریم با کوچک کردن عرض مستطیل‌ها به مساحت واقعی برسیم کافیست $n \to +\infty$؛ زیرا در این صورت

عرض iام مستطیل‌ها $\Delta x_i = \Delta x = \frac{b-a}{n} \to 0$.

از طرف دیگر با کوچک کردن (در واقع به صفر رساندن) عرض مستطیل‌ها، انتخاب c_i در $[x_{i-1}, x_i]$ اهمیتی پیدا نمی‌کند

چون همه آن‌ها $x_{i-1} \le c_i \le x_i$ بسیار به هم نزدیک خواهند بود. لذا قرار می‌دهیم $c_i = x_i$ که بر اساس منظم

بخش قبل داریم $c_i = x_i = a + i\,\Delta x$ یا به عبارت دیگر $c_i = a + i\left(\frac{b-a}{n}\right)$.

پس $S_i = \underbrace{f\left(a + i\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)}_{\text{طول مستطیل}} \underbrace{\left(\frac{b-a}{n}\right)}_{\text{عرض مستطیل}}$ (مساحت مستطیل iام) و

مساحت مورد نظر $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$

(جایی که برای رسیدن به مساحت واقعی $n \to +\infty$)

یعنی

$$S = \lim_{n\to+\infty}(S_1 + S_2 + \cdots + S_n) = \lim_{n\to+\infty}\Big(\underbrace{f(a+\Delta x)\Delta x}_{S_1} + \underbrace{f(a+2\Delta x)\Delta x}_{S_2} + \cdots + \underbrace{f(a+n\Delta x)\Delta x}_{S_n}\Big)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{\Delta x}\Big(f(a+\Delta x) + f(a+2\Delta x) + \cdots + f(a+n\Delta x)\Big)$$

حال ضمن یادآوری چند فرمول، مثال می‌زنیم.

فرمول‌ها:

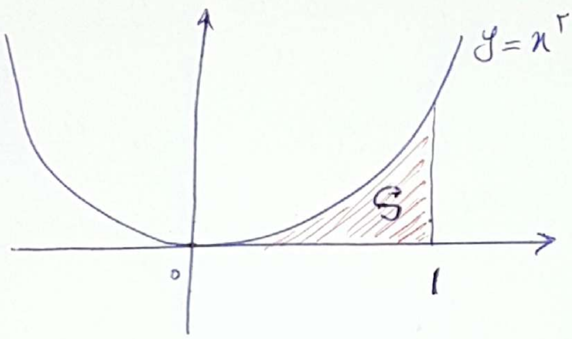
$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

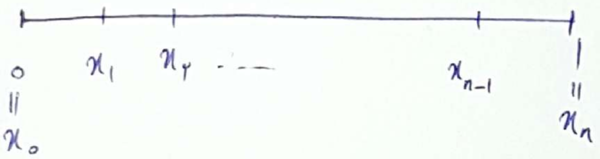
مثال: مساحت زیر منحنی $y=x^2$ را در بازه $[0,1]$ بیابید.

جواب:



داریم

$a=0$
$b=1$
$f(x)=x^2$



$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

$$x_i = a+i\Delta x = a+i\times\frac{1}{n} \overset{a=0}{=\!=} \frac{i}{n}$$

طول مستطیل iام $f(x_i) = f\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{i^2}{n^2} \Longrightarrow$ مساحت مستطیل iام $S_i = f(x_i)\Delta x = \frac{i^2}{n^2}\times\frac{1}{n}$

$$\Rightarrow S_i = \frac{i^2}{n^3}$$

داشتیم $S = \lim_{n\to+\infty}(S_1+\cdots+S_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\underbrace{\frac{1^2}{n^3}}_{S_1}+\underbrace{\frac{2^2}{n^3}}_{S_2}+\cdots+\underbrace{\frac{n^2}{n^3}}_{S_n}\right)$

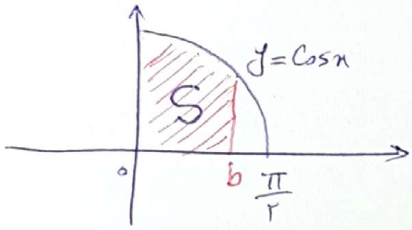
$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3}\left(1^2+2^2+\cdots+n^2\right) \underset{\text{فرمول بالا}}{=\!=} \lim \frac{1}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \Longrightarrow$$

$$S=\lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^3}{6n^3}=\frac{1}{3}.$$

پس مساحت زیر نمودار $y=f(x)$ بالای محور x ها در فاصله $[0,1]$، $\frac{1}{3}$ است.

مثال: مساحت زیر نمودار $f(x)=\cos x$ در بازه $[0,b]$ که $0<b\leqslant\frac{\pi}{2}$ را بیابید.

جواب:



داریم $a=0$

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{b-0}{n}=\frac{b}{n}$$

$$x_i=a+i\Delta x=i\left(\frac{b}{n}\right)=\frac{b}{n}i$$

$$f(x_i)=\cos\left(\frac{b}{n}i\right)\Longrightarrow S_i=\frac{b}{n}\cos\left(\frac{b}{n}i\right)$$

$$S=\lim_{n\to+\infty}(S_1+S_2+\cdots+S_n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{b}{n}\left(\cos\left(\frac{b}{n}\right)+\cos\left(\frac{2b}{n}\right)+\cdots+\cos\left(\frac{nb}{n}\right)\right).$$

که برای n و b داده شده نقطهٔ S را می‌توانیم تقریب بزنیم.

قرارداد:

$$\sum_{i=1}^{n}S_i=S_1+S_2+\cdots+S_n$$ ← نماد مجموع (توضیح بیشتر در فصل بعدی)

لذا داریم

$$S=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}S_i$$ مساحت زیر نمودار $f(x)$

$$=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x\Longrightarrow$$

$$\boxed{S=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\right)f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)}$$

تمرین های صفحه ۲۷۵ کتاب :

حد مساحت زیر نمودار تابع $f(x)$ در فاصله داده شده را بنویسید. (حد را حساب نکنید)

۱۷) $f(x)=\sqrt[4]{x}$ ، $1\leq x\leq 16$

۱۸) $f(x)=1+x^4$ ، $2\leq x\leq 5$

۱۹) $f(x)=x\cos x$ ، $0\leq x\leq \frac{\pi}{2}$.

حل تمرین ۱۷ :

$$\begin{matrix} a=1 \\ b=16 \end{matrix} \Longrightarrow \Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{15}{n}$$

$$x_i=a+i\Delta x=1+\frac{15}{n}i$$

$$f(x_i)=\sqrt[4]{x_i}=\sqrt[4]{1+\frac{15}{n}i}$$

$$S=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{15}{n}\times\left(\sqrt[4]{1+\frac{15}{n}i}\right).$$

تمرین های ۱۸ و ۱۹ به طور مشابه.

---

۲۰) ناحیه ای را مشخص کنید که مساحت آن با حد داده شده برابر باشد. (حد را حساب نکنید)

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}\left(5+\frac{2i}{n}\right)^{10}$$

جواب : با مقایسه حد بالا با فرمول $S=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}f(x_i)$ که $x_i=a+\frac{b-a}{n}i$ داریم:

$$\frac{b-a}{n}=\frac{2}{n}\ ,\quad x_i=a+\frac{b-a}{n}i=5+\frac{2i}{n}\ ,\quad f(x_i)=\left(5+\frac{2i}{n}\right)^{10}$$

$$\boxed{a=5}\Longrightarrow\frac{b-5}{n}=\frac{2}{n}\Rightarrow\boxed{b=7}\Rightarrow x_i=5+\frac{2i}{n}\to\boxed{f(x)=x^{10}}$$

پس $f(x)=x^{10}$ بر ناحیه $[5,7]$.

حال مساحت بدست آمده یعنی مساحت زیر منحنی $y=f(x)$ تا محور xها در فاصله $[a,b]$ را انتگرال $f(x)$ در فاصله $[a,b]$ تعریف می‌کنیم و آن را با نماد $\int_a^b f(x)\,dx$ نمایش می‌دهیم. لذا

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b-a}{n}\right) f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)}$$

و به آن انتگرال معین $f(x)$ در فاصله $[a,b]$ گوئیم. زمانی گوئیم تابع $f(x)$ بر بازه $[a,b]$ انتگرال پذیر است که حد سمت راست تساوی بالا موجود باشد و در غیر اینصورت گوئیم تابع $f(x)$ بر $[a,b]$ انتگرال ناپذیر است.

(در مورد نماد $\int$، در مفهوم انتگرال در فایل جداگانه توضیحاتی ذکر می‌کنیم.)

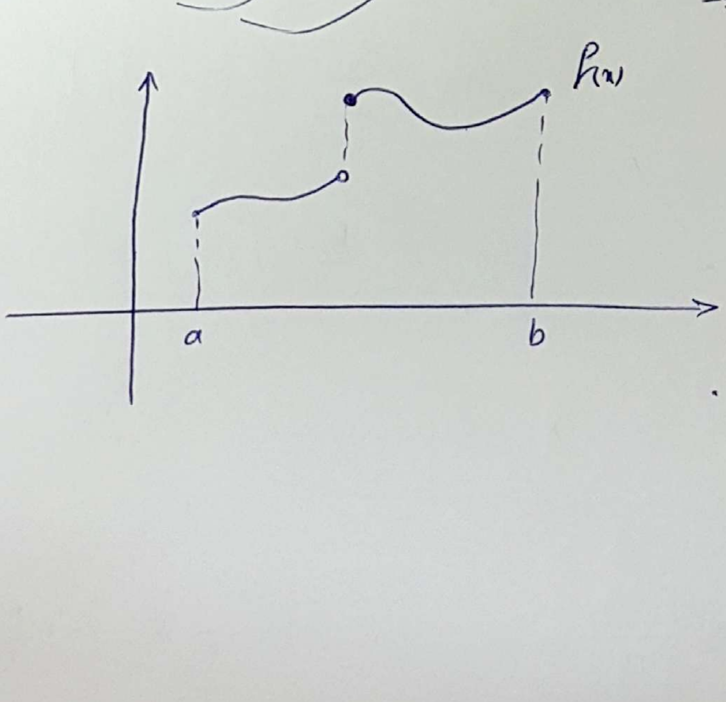
نکته مهم:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(s)\,ds$$

یعنی اگر f بر $[a,b]$ انتگرال پذیر باشد، چون $\int_a^b f(x)\,dx$ همیشه عددی منحصر بفرد است و به متغیر x، t یا s بستگی ندارد یعنی به جای x می‌توان از نمادها یا متغیرهای دیگر نیز استفاده کرد.

قضیه: اگر f بر $[a,b]$ پیوسته باشد یا فقط تعداد متناهی ناپیوستگی جهشی داشته باشد، آن گاه f بر $[a,b]$ انتگرال پذیر است.

یعنی اگر



باز f انتگرال پذیر است.

مثال: عبارت $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i^3+x_i\sin x_i)\Delta x$ را به شکل انتگرال روی بازه $[0,\pi]$ بنویسید.

جواب: داشتیم

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\left(\frac{b-a}{n}\right)}_{\Delta x} f\left(\overbrace{a+\underbrace{\frac{b-a}{n}}_{\Delta x}i}^{x_i}\right)$$

$$\Delta x=\frac{b-a}{n},\quad x_i=a+i\Delta x$$

پس با مقایسه دو جمله داریم

$$\overbrace{b=\pi,\ a=0}^{\text{فرض سوال}},\quad f(x)=x^3+x\sin x$$

در نتیجه

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_i^3+x_i\sin x_i)\Delta x=\int_0^{\pi}(x^3+x\sin x)dx.$$

یادآوری چند فرمول:

$$\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} c=nc$$ (c عدد ثابت است)

$$\sum_{i=1}^{n} ca_i=c\sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=\sum_{i=1}^{n} a_i+\sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)=\sum_{i=1}^{n} a_i-\sum_{i=1}^{n} b_i$$

حل چند تمرین و مثال:

تمرین ۱۹ ص ۳۸۹ $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{2x_i+(x_i)^2}\,\Delta x$ را بر $[1,8]$ به شکل انتگرال معین بنویسید.

جواب: در پیش داشتیم $\int_a^b f(x)\,dx=\lim\sum\limits_{i=1}^{n}\underset{\Delta x}{\boxed{\frac{b-a}{n}}}\,f\Big(\underset{x_i}{\boxed{a+\frac{b-a}{n}i}}\Big)$. لذا طبق فرض $a=1$ ، $b=8$

و $f(x_i)=\sqrt{2x_i+(x_i)^2}$. در نتیجه $f(x)=\sqrt{2x+x^2}$. بنابراین

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{2x_i+(x_i)^2}\,\Delta x=\int_1^8\sqrt{2x+x^2}\,dx.$$

مثال: $\int_0^3 (x^3-6x)\,dx$ را بیابید.

جواب: $a=0,\ b=3,\ f(x)=x^3-6x,\ \Delta x=\frac{3}{n},\ x_i=a+\Delta x\, i=\frac{3i}{n}$

$$\Rightarrow \int_0^3 (x^3-6x)\,dx=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta x\, f(x_i)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{n}\Big(f\big(\tfrac{3i}{n}\big)\Big)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\big(\tfrac{3i}{n}\big)^3-6\big(\tfrac{3i}{n}\big)\Big)=\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{27i^3}{n^3}-\frac{18i}{n}\Big)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{27}{n^3}i^3-\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{18}{n}i\Big)=\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{81}{n^4}\sum_{i=1}^{n}i^3-\frac{54}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i\Big)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{81}{n^4}\times\Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^2-\frac{54}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2}\Big)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{81}{4}\times\frac{n^2(n+1)^2}{n^4}\Big)-\lim_{n\to+\infty}\Big(27\times\frac{n(n+1)}{n^2}\Big)=\frac{81}{4}-27=-\frac{27}{4}.$$

مثال : انتگرال‌های زیر را بیابید.

الف) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ ب) $\int_1^3 (x-1)\,dx$

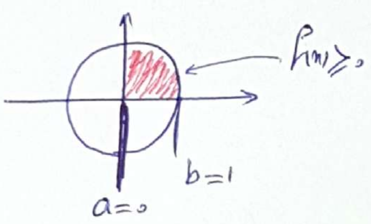
جواب :

الف)

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

$a=0$, $b=1$ $\quad f(x)=\sqrt{1-x^2} \geq 0 \Rightarrow y=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow y^2 = 1-x^2 \Rightarrow x^2+y^2=1$

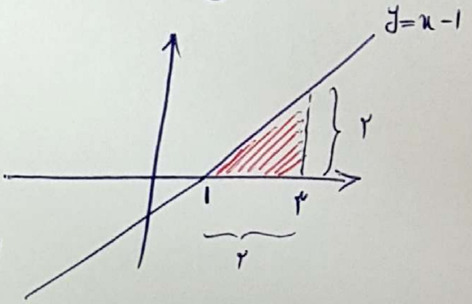
دایره‌ای به مرکز مبداء و شعاع ۱

$\Rightarrow$ 

لذا مساحت ناحیه‌ی هاشور خورده، انتگرال مورد نظر است. پس

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \text{مساحت ناحیه‌ی هاشور خورده} = \frac{1}{4}\,\text{مساحت دایره} = \frac{\pi}{4}$$

ب) $\int_1^3 (x-1)\,dx$ $\qquad a=1,\ b=3,\ f(x)=x-1 \Rightarrow y=x-1$

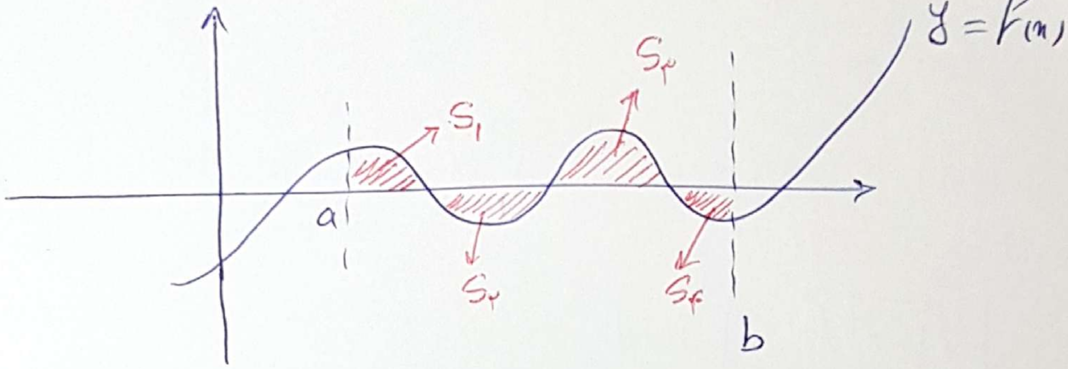


$$\Rightarrow \int_1^3 (x-1)\,dx = \text{مساحت ناحیه‌ی هاشور خورده} = \frac{1}{2}\times 2\times 2 = 2$$

تمرین ۲۴ صفحه ۳۹۰ و تمرین‌های ۲۹، ۳۰، ۳۱ و ۳۲ صفحه ۳۹۰ کتاب را حل نمائید.

۴) نکته آخر اینکه اگر $f(x)$ بر $[a,b]$ مثبت نبود، $\int_a^b f(x)\,dx$ را چگونه بیابیم.

در پاسخ، $\int_a^b f(x)\,dx$ برابر است با مجموع مساحت‌های زیر تابع $f(x)$ بالای محور xها در فاصله $[a,b]$ منهای مجموع مساحت‌های بالای تابع $f(x)$ زیر محور xها در فاصله $[a,b]$. به شکل صفحه بعد توجه نمائید.

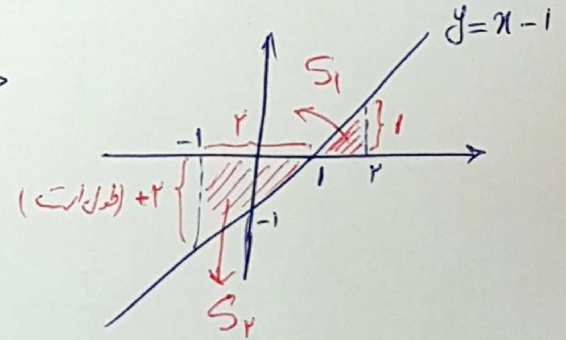


اگر S_i ها مساحت‌های ناحیه‌های هاشور خورده باشند داریم:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{(S_1+S_3)}_{\text{مساحت‌های بالای محور } x\text{ها}} - \underbrace{(S_2+S_4)}_{\text{مساحت‌های زیر محور } x\text{ها}}$$

مثال: $\int_{-1}^{2}(x-1)\,dx$ را بیابید.

$a=-1$
$b=2$
$f(x)=x-1 \Longrightarrow$



$$\int_{-1}^{2}(x-1)\,dx = S_1 - S_2$$

$$= \frac{1}{2}(1\times 1) - \frac{1}{2}(2\times 2) = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}.$$