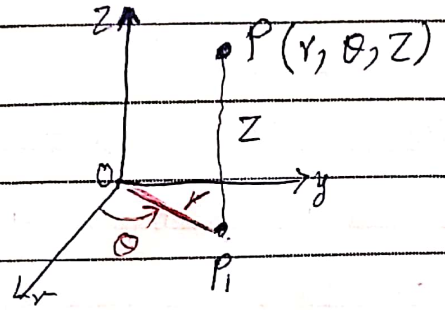
برای نمایش یک نقطه در فضای سه بعدی در فضا سه دستگاه مختصات وجود دارد
۱- دستگاه مختصات دکارتی ۲- دستگاه مختصات استوانه‌ای ۳- دستگاه مختصات کروی
در این جلسه دستگاه مختصات استوانه‌ای معرفی می‌کنیم و سپس به نحوه انتقال مختصات دکارتی به مختصات استوانه‌ای و تغییر متغیر در مختصات استوانه‌ای می‌پردازیم

دستگاه مختصات استوانه‌ای تعمیم دستگاه مختصات قطبی به فضا است
یعنی برای نمایش یک نقطه در این دستگاه مختصات از سه مختص (r, θ, z) استفاده می‌کنیم که در آن z فاصله جهت‌دار نقطه P تا صفحه xoy (صفحه قطبی) است و (r, θ) مختصات قطبی تصویر نقطه P یعنی P_1 در صفحه قطبی است
شکل مقابل



r فاصله مبدا تا P_1 در صفحه قطبی است
θ زاویه بین محور xها و OP_1 است

ارتباط بین مختصات دکارتی و استوانه‌ای

معادلات

$$(1)\quad \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta = \frac{y}{x} \\ z = z \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} r^2 = x^2+y^2 \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases}$$

مختصات هر نقطه (x, y, z) در مختصات دکارتی را به مختصات (r, θ, z) در مختصات استوانه‌ای تبدیل می‌کند و برعکس.

مثال الف) مختصات استوانه‌ای نقطه $(x, y, z) = (3, -3, -7)$ را بیابید
ب) مختصات دکارتی نقطه $(r, \theta, z) = (2, \frac{2\pi}{3}, 1)$ را بیابید

حل الف)

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\tan\theta = \frac{-3}{3} = -1 \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{4} + 2n\pi \quad \text{یا} \quad \theta = \frac{7\pi}{4}$$

پس جواب $(3\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}, -7)$ در مختصات استوانه‌ای است

حل ب)

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \\ y = r\sin\theta = 2\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow (-1, \sqrt{3}, 1)$$

مختصات نقطه در مختصات دکارتی است

محل مهر آموزش

معادلات رویه‌ها در دستگاه مختصات استوانه‌ای به صورت $z=f(r,\theta)$
یا $F(r,\theta,z)=0$ نوشته می‌شود. کافی است که از معادلات (۱) و (۲)
کمک بگیریم و یک معادله در مختصات دکارتی را به معادله در مختصات استوانه‌ای تبدیل کنیم.

مثال ۱) الف) $z=x^2+y^2$ سهموی دوار در مختصات استوانه‌ای به صورت $z=r^2$ است

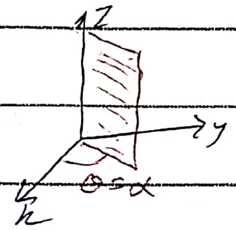
ب) $z=r$ در مختصات دکارتی $x^2+y^2=z^2$ (مخروط دوار) است

مثال ۲: الف) معادله کره $x^2+y^2+z^2=1$ در مختصات استوانه‌ای $r^2+z^2=1$ است

ب) $r=2\cos\theta$ در مختصات دکارتی به صورت $x^2+y^2=2x$ است

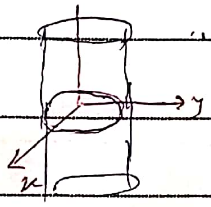
زیرا $r=2\cos\theta \Rightarrow r^2=2r\cos\theta \Rightarrow x^2+y^2=2x$

توجه: رویه‌ها و منحنی‌ها در مختصات استوانه‌ای و دکارتی هیچ تغییری نمی‌کنند و تنها معادلات آن تغییر می‌کند.



مثال $\theta=\alpha$ یک صفحه شامل محور z ها است

$r=2$ استوانه $x^2+y^2=4$ است.



انتگرال سه‌گانه در مختصات استوانه‌ای: اگر ناحیه D در مختصات استوانه‌ای به صورت z-ساده باشد یعنی

$$D=\{(x,y,z)\mid g_1(x,y)\le z\le g_2(x,y)\}$$

و سایه D در مختصات قطبی به صورت

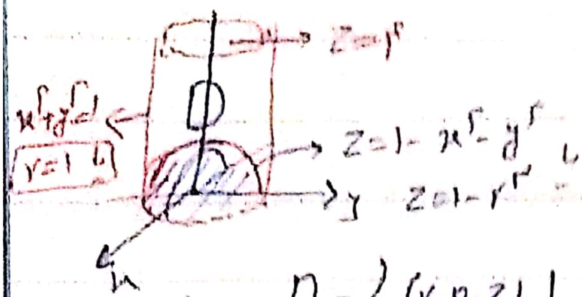
$D_1=\{(r,\theta)\mid \alpha\le\theta\le\beta \ \text{و}\ h_1(\theta)\le r\le h_2(\theta)\}$ باشد

در این صورت

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dD=\int_\alpha^\beta\int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)}\int_{g_1(r\cos\theta,r\sin\theta)}^{g_2(r\cos\theta,r\sin\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\,r\,dz\,dr\,d\theta$$

توجه: $dD=dz\,dy\,dx=r\,dz\,dr\,d\theta$ (کتاب صفحه ۱۲۹۵ از روی شکل)

مثال ۱) جسم سه بعدی D درون استوانه $x^2+y^2=1$ زیر صفحه $z=4$ و بالای سهمیگون دوار $z=1-x^2-y^2$ قرار دارد (شکل زیر). چگالی در هر نقطه متناسب با فاصله‌اش تا محور استوانه است. جرم D را بیابید (مختصات استوانه‌ای)



$$\rho(x,y,z)=k\sqrt{x^2+y^2}=kr$$

k ضریب تناسب است

$$D=\{(r,\theta,z)\mid 0\le\theta\le 2\pi \quad 0\le r\le 1 \text{ و } 1-r^2\le z\le 4\}$$

سایه D در صفحه قطبی $r=1$ است پس $0\le\theta\le 2\pi$ و $0\le r\le 1$

$$\begin{cases} z=1-r^2 \\ z=4 \end{cases}$$

$$M=\iiint_D k\sqrt{x^2+y^2}\,dD=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{1-r^2}^{4} k\cdot r\cdot r\,dz\,dr\,d\theta=k\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2[4-1+r^2]\,dr$$

$$=2k\pi\int_0^1[3r^2+r^4]\,dr=2k\pi\left[r^3+\frac{r^5}{5}\right]_0^1=2k\pi\left[1+\frac{1}{5}\right]=\frac{12}{5}k\pi$$

مثال ۲) انتگرال $I=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)\,dz\,dy\,dx$ را حساب کنید

حل: در مختصات استوانه‌ای حل می‌کنیم

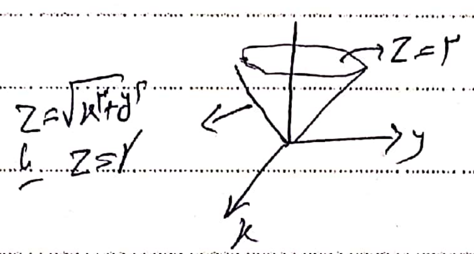
$$\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2 \implies r\le z\le 2$$

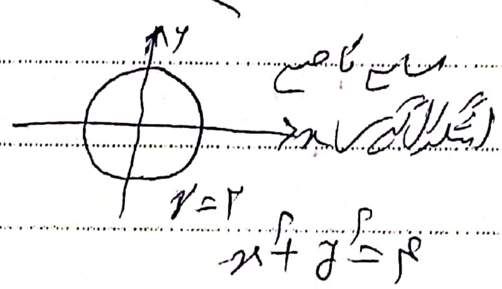
تصویر ناحیه در صفحه قطبی دایره $x^2+y^2\le 4$ است زیرا

$$\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z=2 \end{cases} \implies 4=x^2+y^2 \implies 0\le\theta\le 2\pi \;,\; 0\le r\le 2$$

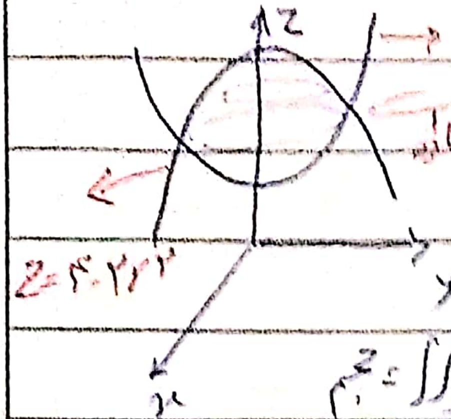
$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_r^2 r^2\cdot r\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^3[z]_r^2\,dr=$$

$$=2\pi\int_0^2[2r^3-r^4]\,dr=2\pi\left[\frac{1}{2}r^4-\frac{1}{5}r^5\right]_0^2=\frac{16}{5}\pi \text{ واحد مکعب}$$





① حجم جسم محصور بین رویه‌های $Z=1+x^2+y^2$ و $z=4-2x^2-2y^2$ را بیابید.



$\to z=1+x^2+y^2=1+r^2$

حل: چون ناحیه دارای محور تقارن (محور zها) است و چون که انتگرال‌گیری در مختصات استوانه‌ای راحت‌تر حل می‌شود

$$\text{حجم}=\iiint_D dD=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_{1+r^2}^{4-2r^2} r\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}} r\big[z\big]_{1+r^2}^{4-2r^2}dr\,d\theta$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{3}} r[4-2r^2-1-r^2]\,dr=2\pi\int_0^{\sqrt{3}}[3r-3r^3]\,dr=*$$

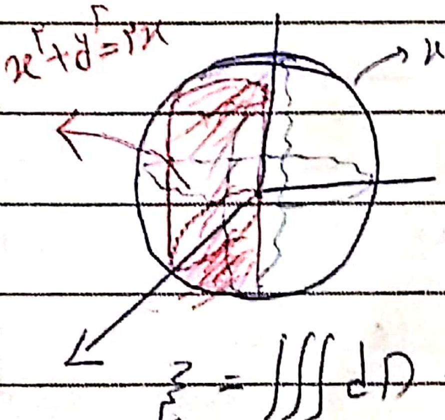
$Z=4-r^2$, $Z=1+r^2$ $\Rightarrow 4-r^2=1+r^2\Rightarrow 3=r^2\Rightarrow r=\sqrt{3}$

تصویر در صفحه xy دایره‌ای به مرکز (۰،۰) و شعاع $\sqrt{3}$ است

$$*=2\pi\left[\frac{3}{2}r^2-\frac{3}{4}r^4\right]_0^{\sqrt{3}}=2\pi\left[\frac{9}{2}-\frac{27}{4}\right]=\frac{9}{2}\pi$$ واحد مکعب

حجم مشترک که

② استوانه مستدیر قائم $x^2+y^2=2x$ از کره $x^2+y^2+z^2\le 4$ را جدا می‌کند. حجم آن را بیابید.



حل: چون ناحیه D دارای محور تقارن است و z به صورت ... در مختصات استوانه‌ای راحت‌تر حل می‌شود

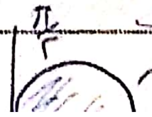
$$\text{حجم}=\iiint_D dD=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta}\int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta}2r\sqrt{4-r^2}\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{2}{3}(4-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2\cos\theta}d\theta=\frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[-8\sin^3\theta+8\right]=\dots=\frac{32}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$$ واحد مکعب

تصویر در صفحه xy دایره $x^2+y^2=2x$

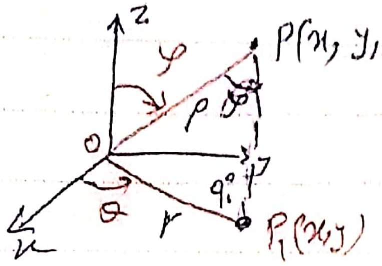
$z^2+r^2=4\Rightarrow -\sqrt{4-r^2}\le Z\le\sqrt{4-r^2}$

یا $r=2\cos\theta$



دستگاه مختصات کروی

در مختصات کروی، هر نقطه در فضا سه مختص (ρ, φ, θ) نسبت داده می‌شود که ρ فاصله نقطه P تا مبدأ مختصات است یعنی $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ و φ زاویه بین محور zهای مثبت تا پاره‌خط OP است و $0\le\varphi\le\pi$ و θ همان θ در مختصات قطبی و استوانه‌ای است شکل زیر



$P(x,y,z)=P(\rho,\varphi,\theta)$

$P_1(x,y)$ تصویر P در صفحه xy یا صفحه قطبی است.

در مثلث OP_1P داریم:

$\sin\varphi=\frac{r}{\rho} \Rightarrow r=\rho\sin\varphi$

$\cos\varphi=\frac{z}{\rho} \Rightarrow z=\rho\cos\varphi$

و معادلات

$$(1)\quad \begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \varphi=\cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \\ \theta=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

معادلات (1) و (2) ارتباط بین مختصات دکارتی و کروی است.

توجه: $\rho\ge 0$ و $0\le\varphi\le\pi$ و $0\le\theta\le 2\pi$

مثال الف) مختصات نقطه $P(x,y,z)=P(0,2\sqrt{3},-2)$ در مختصات کروی بیابید.

ب) مختصات نقطه $P(\rho,\varphi,\theta)=P(2,\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4})$ در مختصات بیابید.

حل الف)

$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{0^2+(2\sqrt{3})^2+(-2)^2}=\sqrt{12+4}=\sqrt{16}=4$

$\cos\varphi=\frac{z}{\rho}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\varphi=\frac{2\pi}{3}$

$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{x}{\rho\sin\varphi}=\frac{0}{4\sin(\frac{2\pi}{3})}=0$ یا $\theta=\tan^{-1}(\frac{2\sqrt{3}}{0})\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}$

$P(4,\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{2})$

حل ب)

$$\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta=2\sin(\frac{\pi}{3})\cos(\frac{\pi}{4})=2(\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\sqrt{6}}{2}=\sqrt{\frac{3}{2}} \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta=2\sin(\frac{\pi}{3})\sin(\frac{\pi}{4})=2(\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\sqrt{6}}{2}=\sqrt{\frac{3}{2}} \\ z=\rho\cos\varphi=2\cos\frac{\pi}{3}=2(\frac{1}{2})=1 \end{cases}$$

$\Longrightarrow P(\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}},1)$

تبصره: معادلات در مختصات کروی به صورت $F(\rho,\varphi,\theta)=0$ یا $\rho=f(\varphi,\theta)$ هستند.

مثال ۱) کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ در مختصات کروی $\rho=a$ است

۲) مخروط دوار $z=\sqrt{x^2+y^2}$ در مختصات کروی $\varphi=\frac{\pi}{4}$ است زیرا

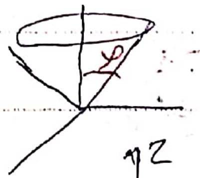
$$\rho\cos\varphi=z=\sqrt{x^2+y^2}=r=\rho\sin\varphi \Rightarrow \sin\varphi=\cos\varphi \Rightarrow \tan\varphi=1 \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{4}$$

۳) صفحه $z=3$ در مختصات کروی به صورت $\rho=\frac{3}{\cos\varphi}=3\sec\varphi$ است زیرا $z=3=\rho\cos\varphi$

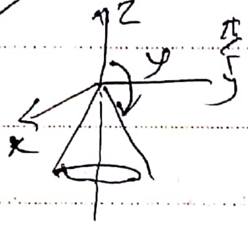
۴) معادله $x^2+y^2+z^2=2z$ به صورت $\rho=2\cos\varphi$ است زیرا

$$\rho^2=2\rho\cos\varphi \Longrightarrow \rho=2\cos\varphi$$

حالتهای خاص الف) $c=\varphi$، نیمه مخروط است شکل مقابل

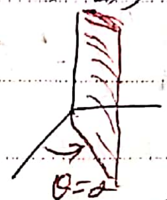


$0<c<\frac{\pi}{2}$



$\frac{\pi}{2}<c<\pi$

ب) $\theta=\alpha$ صفحه‌ای شامل محور zها است



ج) $\rho=a$ کره‌ای با مرکز $(0,0,0)$ و شعاع a است.

انتگرال سه‌گانه در مختصات کروی

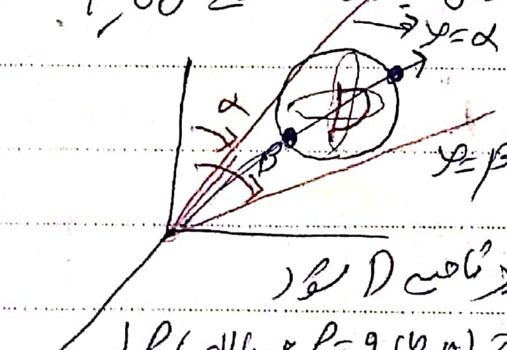
$$I=\iiint_D f(x,y,z)\,dD$$

به صورت زیر در می‌آید $dD=\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$ (شکل صفحه ۱۰۳۰ کتاب)

$$D=\{(\rho,\varphi,\theta) \mid g_1(\varphi,\theta)\le\rho\le g_2(\varphi,\theta) ,\ \alpha\le\varphi\le\beta ,\ \theta_0\le\theta\le\theta_1\}$$

$$I=\int_{\theta_0}^{\theta_1}\int_{\alpha}^{\beta}\int_{g_1(\varphi,\theta)}^{g_2(\varphi,\theta)} f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)\,\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

توجه: چون منحنی‌ها و رویه‌ها در مختصات دکارتی و استوانه‌ای و کروی یکی است و فقط معادلات آن عوض می‌شود برای یافتن حدود در مختصات کروی به صورت زیر عمل می‌کنیم



D را بین دو مخروط $\varphi=\alpha$ و $\varphi=\beta$ قرار می‌دهیم

در این صورت $\alpha\le\varphi\le\beta$ است

یافتن حدود ρ: پرتویی از مبداء خارج می‌کنیم تا وارد ناحیه D شود

محل ورود یعنی $\rho=g_1(\varphi,\theta)$ حد پایین ρ و محل خروج $\rho=g_2(\varphi,\theta)$ حد بالای ρ است

برای تعیین حدود θ، تصویر D در صفحه قطبی (یعنی D_1) را می‌یابیم (همانند مختصات قطبی)

$$\theta_0 \le \theta \le \theta_1$$

مثال ۱) انتگرال $\iiint_D e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dv$ را حساب کنید که D کره $x^2+y^2+z^2\le 1$ است

حل)

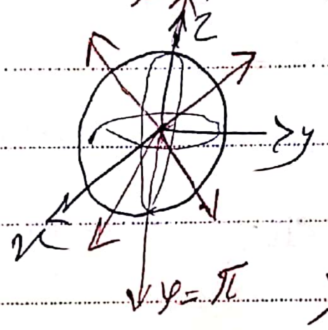
$$\iiint_D e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 e^{(\rho^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi \int_0^1 \rho^2 e^{\rho^3} d\rho =$$

$$=(2\pi)\left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi}\left[\frac{1}{3} e^{\rho^3}\right]_0^1 = 4\pi(e-1)$$

چون $x^2+y^2+z^2\le 1$ کره است و در مختصات کروی $0\le\rho\le 1$ است و $0\le\varphi\le\pi$

و تصویر در مختصات قطبی دایره $x^2+y^2\le 1$ است پس $0\le\theta\le 2\pi$

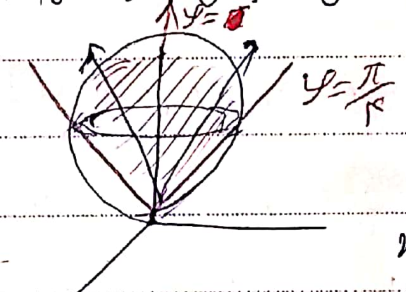


$0\le\rho\le 1$

$0\le\varphi\le\pi$

$0\le\theta\le 2\pi$

مثال ۲) با استفاده از مختصات کروی حجم جسم صلبی را که بالای مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و درون کره $x^2+y^2+z^2=z$ قرار دارد را بیابید



$0\le\rho\le\cos\varphi$

$x^2+y^2+z^2=z \Rightarrow \rho^2=\rho\cos\varphi \Rightarrow \rho=\cos\varphi$

تصویر در مختصات قطبی دایره $x^2+y^2=\frac{1}{4}$ است

$$\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ x^2+y^2+z^2=z \end{cases} \Rightarrow 2(x^2+y^2)=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow 4(x^2+y^2)^2=x^2+y^2 \Rightarrow x^2+y^2=\frac{1}{4}$$

$$\text{حجم} = \iiint_D dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\cos\varphi} \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi \left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_0^{\cos\varphi} d\varphi$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3}\sin\varphi\cos^3\varphi \, d\varphi = \dots = \frac{\pi}{8}$$ واحد مکعب

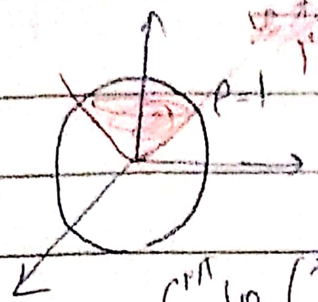
محل مهر آموزش

صفحه ۸

(۳) ~~حجم ناحیه‌ای را بیابید که محصور بین $\varphi = \frac{\pi}{3}$ از کره $\rho = 1$ است~~

~~بستنی مانند را بیابید~~

حل: ~~ناحیه D قسمتی از کره $\rho = 1$ است پس~~ $\varphi = \frac{\pi}{3}$



$$\text{حجم} = \iiint_D dD = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^1 \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

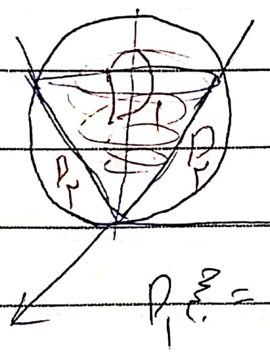
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\varphi \, d\varphi \int_0^1 \rho^2 \, d\rho = (2\pi)\left[-\cos\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{3}}\left[\frac{1}{3}\right] =$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left[-\frac{1}{2}+1\right] = \frac{\pi}{3} \text{ واحد مکعب}$$

تصویر در صفحه xoy دایره $x^2+y^2=\frac{3}{4}$ است پس $0 \le \theta \le 2\pi$

زیرا $\rho = 1$، $\varphi = \frac{\pi}{3}$، $r = \rho\sin\varphi \Rightarrow r = 1\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ یا $x^2+y^2=\frac{3}{4}$

(۴) ~~نشان دهید که مخروط $x^2+y^2=z^2$ درون کره $x^2+y^2+z^2=2az$ را~~ به دو قسمت تقسیم می‌کند که حجم یکی ۳ برابر حجم دیگری است



$$x^2+y^2+z^2=2az \Longrightarrow \rho = 2a\cos\varphi$$

$$x^2+y^2=z^2 \Longrightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$D_1 \text{ حجم} = \iiint dD = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2a\cos\varphi} \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_0^{2a\cos\varphi} \sin\varphi \, d\varphi = \frac{16}{3}\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3\varphi \sin\varphi \, d\varphi = \dots = \pi a^3$$

$$D_2 \text{ حجم} = \text{حجم کره} - D_1 \text{ حجم} = \frac{4}{3}\pi a^3 - \pi a^3 \Longleftarrow \frac{4}{3}\pi a^3 = \text{حجم کره}$$

$$D_2 \text{ حجم} = \frac{1}{3}\pi a^3 = \frac{1}{3}\left(D_1 \text{ حجم}\right)$$

تمرین: انتگرال زیر را در مختصات کروی و استوانه‌ای بنویسید.

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz \, dy \, dx$$