(۱) ۸۷/۳/۲۵ فرض کنید که $f(x,y,z)=x^2y^2z^2$ یک تابع سه متغیره باشد مطلوب است محاسبه

$$\iint_S (\vec{\nabla} f\cdot \vec{n})\,d\sigma = ?$$

که در آن S سطح خارجی مکعب واحد محدود به صفحات مختصات و صفحات $x=1$ و $y=1$ و $z=1$ است

حل: طبق قضیه واگرایی (دیورژانس)

$$\iint_S (\vec{\nabla} f\cdot \vec{n})\,d\sigma = \iiint_D \operatorname{div}(\vec{\nabla} f)\,dV = \iiint_D (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} f)\,dV = \iiint_D \nabla^2 f\,dV =$$

$$= 2\int_0^1\!\!\int_0^1\!\!\int_0^1 (y^2z^2+x^2z^2+x^2y^2)\,dz\,dy\,dx = 2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\right)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

(۲) ۸۷/۳/۲۵ انتگرال خط مقابل را محاسبه کنید.

$$I=\int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} 2xy\,dx+(x^2+z^2)\,dy+2yz\,dz$$

حل: چون

$$\operatorname{curl}\vec{F}=\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 2xy & x^2+z^2 & 2yz\end{vmatrix}=0$$

پس طبق قضیه مستقل از مسیر داریم:

$$f(x,y,z)=x^2y+z^2y \Longrightarrow \vec{\nabla} f=\vec{F}$$

بنابراین

$$I=\int_C df=\Big[f(x,y,z)\Big]_{(0,0,0)}^{(1,2,3)}=\Big[(x^2+z^2)y\Big]_{(0,0,0)}^{(1,2,3)}=2(10)=20$$

(۳) ۸۷/۳/۲۵ مساحت سطح بخشی از مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ که بین صفحه xy و استوانه $x^2+y^2=2y$ قرار دارد را حساب کنید. حل:

$$d\sigma=\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dx\,dy=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dx\,dy=\sqrt{2}\,dx\,dy$$

$$\text{مساحت}=\iint_S d\sigma=\iint_{x^2+y^2=2y}\sqrt{2}\,dx\,dy=\sqrt{2}\int_0^{\pi}\!\!\int_0^{2\sin\theta} r\,dr\,d\theta=\sqrt{2}\int_0^{\pi}\Big[\frac{r^2}{2}\Big]_0^{2\sin\theta}d\theta$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin^2\theta\,d\theta=\sqrt{2}\int_0^{\pi}(1-\cos2\theta)\,d\theta=\sqrt{2}\,\pi$$

۴) مساحت قسمتی از سطح کره $x^2+y^2+z^2=32$ جدا شده توسط مخروط $z^2=x^2+y^2$ را بیابید

حل:

$$\begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ x^2+y^2+z^2=32 \end{cases} \Rightarrow 2x^2+2y^2=32 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} x^2+y^2=16 \\ \text{ناحیه } R \end{array}}$$

$$\text{مساحت} = 2\iint_R d\sigma = 2\times\sqrt{32}\iint \frac{dx\,dy}{\sqrt{32-x^2-y^2}} = 8\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{4}\frac{r\,dr}{\sqrt{32-r^2}}\,d\theta$$

$$= 8\sqrt{2}\,\pi\left[4\sqrt{2}-4\right] = 32\pi\left[2-\sqrt{2}\right]$$

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \Rightarrow d\sigma = \frac{a\,dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

۵) اگر $\vec F = x^2\vec i + xy\vec j + zx\vec k$ یک میدان برداری باشد مطلوب است محاسبه $\iint(\vec F\cdot\vec n)\,d\sigma$ که در آن S چهاروجهی با رئوس $(0,0,0)$ و $(0,0,1)$ ، $(3,0,0)$ و $(0,2,0)$ می‌باشد. حل: طبق قضیه واگرایی

$$\iint_S(\vec F\cdot\vec n)\,d\sigma = \iiint_D \operatorname{div}\vec F\,dD = \iiint_D (2x+x+x)\,dD = 4\iiint_D x\,dD =$$

$$= 4\int_0^3\int_0^{2(1-\frac{x}{3})}\int_0^{1-\frac{x}{3}-\frac{y}{2}} x\,dz\,dy\,dx = 4\int_0^3\int_0^{2(1-\frac{x}{3})} x\left(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{2}\right)dy\,dx$$

$$= 4\int_0^3 x\left[y-\frac{x}{3}y-\frac{y^2}{4}\right]_0^{2(1-\frac{x}{3})}dx =$$

۶) شار میدان $\vec F = 4x^3\vec i + y^3\vec j + 9z^3\vec k$ خارج از بیضوی $4x^2+y^2+9z^2=1$ را بیابید: حل: طبق قضیه دیورژانس داریم

$$\text{شار} = \iint_S(\vec F\cdot\vec n)\,d\sigma = \iiint_D \operatorname{div}\vec F\,dD = \iiint_D 3(4x^2+y^2+9z^2)\,dD =$$

در مختصات کروی تعمیم یافته

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1}\frac{3}{6}\rho^4\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta = \frac{2\pi}{5}$$

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\frac{1}{3}\rho\cos\varphi \end{cases}$$

۸۶/۱/۱۵

مثال ۷: انتگرال منحنی الخط $\oint_C x\,dy - y\,dx$ را که در آن منحنی C، $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=8^{\frac{2}{3}}$ است را حساب کنید. حل:

$$\begin{cases} x = 8\cos^3\theta \\ y = 8\sin^3\theta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} dx = -24\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta \\ dy = 24\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta \end{cases} \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$\oint_C x\,dy - y\,dx = \int_0^{2\pi}\left[192\cos^4\theta\sin^2\theta + 192\sin^4\theta\sin^2\theta\right]d\theta =$$

$$= 192\int_0^{2\pi}\underbrace{\cos^2\theta\sin^2\theta}_{\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^2}\,d\theta = \frac{192}{4}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\theta)\,d\theta = 48\pi$$

۸۶/۲/۲

مثال ۸: انتگرال منحنی الخط $I=\oint(e^x - x^2y)\,dx + 3x^2y\,dy$ را محاسبه کنید که در آن C منحنی بسته حاصل از $y=x^2$ و $x=y^2$ است.

حل: طبق قضیه گرین

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 6xy, \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = -x^2$$

$$\oint_C (e^x - x^2y)\,dy + 3x^2y\,dy = \iint_R\left[6xy + x^2\right]dR = \int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(6xy+x^2)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1\left[3xy^2 + x^2y\right]_{x^2}^{\sqrt{x}}dx = \int_0^1\left[3x^2 + x^{\frac{3}{2}} - 3x^5 - x^5\right]dx = 1 + \frac{2}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = ?$$

۸۶/۲/۲

مثال ۹: نشان دهید انتگرال خط $\int \frac{dx}{y} - \frac{x}{y^2}\,dy + z\,dz$ مستقل از مسیر است $(y\neq 0)$ و سپس انتگرال خط را از نقطه $A(5,-1,2)$ تا $B(9,-3,3)$ محاسبه کنید.

حل:

$$\vec F = \frac{1}{y}\vec i - \frac{x}{y^2}\vec j + z\vec k \qquad \operatorname{curl}\vec F = \vec\nabla\times\vec F = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} & z \end{vmatrix} = 0$$

چون $y\neq 0$ فرض شده است و مولفه های F و مشتقات آنها در ناحیه $y\neq 0$ پیوسته اند و $\operatorname{curl}F = 0$ پس انتگرال خط مستقل از مسیر است.

$$f(x,y,z) = \frac{x}{y} + \frac{z^2}{2} \Rightarrow \vec F = \vec\nabla f$$

$$\int \frac{1}{y}\,dx - \frac{x}{y^2}\,dy + z\,dz = \int_C d\left(\frac{x}{y} + \frac{z^2}{2}\right) = \left[\frac{x}{y} + \frac{z^2}{2}\right]_A^B = \left(-3+\frac{9}{2}\right) - (-5+2)$$

$$= \frac{9}{2}$$

مثال ۱۰: انتگرال منحنی الخط $I=\oint_C 6xy\,dx+(x^3+xy^2)\,dy$ را محاسبه کنید که در آن C منحنی با معادله $3x^2+y^2=6x$ است.

حل: طبق قضیه گرین:

$$\oint_C 6xy\,dx+(x^3+xy^2)\,dy=\iint_R(3x^2+y^2-6x)\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}\int_0^1 3\sqrt{3}\,r^3\,dr\,d\theta=?$$

$$=6\pi\sqrt{3}\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{3\pi\sqrt{3}}{2}$$

$$3x^2-6x+y^2=0\Rightarrow 3(x-1)^2+y^2=3\Rightarrow (x-1)^2+\frac{y^2}{3}=1\quad\begin{cases}x-1=r\cos\theta\\ y=\sqrt{3}\,r\sin\theta\end{cases}$$

از راه مستقیم هم این سوال حل کرده

$$x-1=\cos\theta\Rightarrow dx=-\sin\theta\,d\theta$$

$$y=3\sin\theta\to dy=3\cos\theta\,d\theta$$

$$\oint 6xy\,dx+(x^3+xy^2)\,dy=\int_0^{2\pi}\Big[18\sin\theta(1+\cos\theta)(-\sin\theta)+(1+\cos\theta)^3+(1+\cos\theta)(-3\sin\theta)\times 9\sin^2\theta\Big]\,d\theta$$

$= \text{---} \qquad =$ جواب

مثال ۱۱: انتگرال منحنی الخط زیر را حساب کنید

$$\oint_C\frac{xy^2}{1+x^2}\,dx+y\ln(1+x^2)\,dy$$

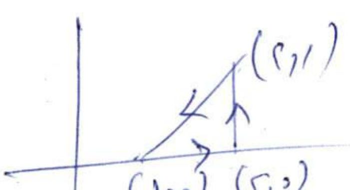
که C دایره $x^2+y^2+2y=0$ است.

حل: طبق قضیه گرین

$$\oint\frac{xy^2}{1+x^2}\,dx+y\ln(1+x^2)\,dy=\iint_R\left(\frac{2xy}{1+x^2}-\frac{2xy}{1+x^2}\right)=\iint_R 0\,dR=0$$

مثال ۱۲: انتگرال منحنی الخط $\oint(x^3+e^{-y})\,dx+(y+\ln x)\,dy$ را محاسبه کنید که در آن C مثلثی با رئوس $(1,0)$ ، $(2,0)$ و $(2,1)$ است.

حل: طبق قضیه گرین

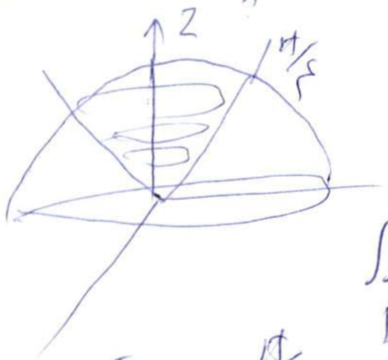


$$\oint_C(x^3+e^{-y})\,dx+(y+\ln x)\,dy=\iint_R\left[\frac{1}{x}+e^{-y}\right]dR=$$

$$=\int_1^2\int_0^{x-1}\left(\frac{1}{x}+e^{-y}\right)dy\,dx=$$

۸۶/۱/۱۵

مثال ۱۳: انتگرال سه‌گانهٔ $\iiint_D (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\, dV$ را حل کنید که در آن D ناحیه توپر فضایی محدود به کره $x^2+y^2+z^2=4$ و درون مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ محدود است.



حل: در مختصات کروی حل می‌کنیم

$$\iiint_D (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2} \rho^3 \cdot \rho^2 \sin\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^{2} \rho^5\, d\rho = \frac{2^5\pi}{3}(2-\sqrt{2})$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ z^2=x^2+y^2 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=2$$

تصویر D در صفحه xoy

۸۶/۱/۱۸

مثال ۱۴: مساحت قسمتی از سطح S با معادله $x=\sqrt{y^2+z^2}$ که توسط صفحات $x=1$ و $x=2$ بریده شده است را حساب کنید.

حل:

$$d\sigma = \sqrt{1+\frac{y^2}{y^2+z^2}+\frac{z^2}{y^2+z^2}}\, dy\, dz = \sqrt{2}\, dy\, dz$$

$$\text{مساحت سطح} = \iint_S d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_1^{2} \sqrt{2}\, dy\, dz = 2\sqrt{2}\left[2-\frac{1}{2}\right]\pi = 3\sqrt{2}\pi$$

مثال ۱۵: انتگرال سه‌گانهٔ $\iiint_D (4x^2+36y^2+9z^2)\, dD$ را محاسبه کنید که در آن D ناحیه داخلی رویهٔ $\frac{x^2}{9}+y^2+\frac{z^2}{4}=1$ است.

حل: از تغییر متغیر کروی تعمیم یافته استفاده می‌کنیم

$$\begin{cases} x=3\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=2\rho\cos\varphi \end{cases}$$

$0\le\rho\le1$
$0\le\varphi\le\pi$
$0\le\theta\le2\pi$

$$\iiint_D (4x^2+36y^2+9z^2)\, dD = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} 36\times6\rho^4\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = \frac{24\times36}{5}\pi$$

مثال ۱۶: انتگرال دوگانهٔ $I=\iint_R (x^4-y^4)\, dx\, dy$ را محاسبه کنید که در آن R ناحیه محدود به خم‌های $xy=2$ و $xy=1$ و $x=\sqrt{3+y^2}$ و $x=\sqrt{1+y^2}$ واقع در ربع اول است.

حل: از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم

$$\begin{aligned} u&=xy \\ v&=x^2-y^2 \end{aligned} \qquad J(u,v)=\frac{1}{J(x,y)}$$

$$J(x,y)=\begin{vmatrix} y & x \\ 2x & -2y \end{vmatrix}=-2(x^2+y^2) \Rightarrow |J(u,v)|=\left|\frac{1}{-2(x^2+y^2)}\right|=\frac{1}{2(x^2+y^2)}$$

$$\iint_R (x^4-y^4)\,dR=\iint_R (x^2+y^2)(x^2-y^2)\,dR=\int_1^3\int_1^2 \frac{1}{2}\,v\,du\,dv=\frac{9}{4}$$

$xy=1 \Rightarrow u=1$, $xy=3 \Rightarrow u=2 \Rightarrow 1\leq u\leq 2$ و $v=x^2-y^2=1$, $v=x^2-y^2=3 \Rightarrow 1\leq v\leq 3$

مثال ۱۷) مطلوب است مساحت قطعه سطح $y^2 z^2$ $x=12-y^2-z^2$ و $x\geq 0$.

$$d\sigma=\sqrt{1+f_y^2+f_z^2}\,dy\,dz=\sqrt{1+4y^2+4z^2}\,dy\,dz$$

$$\text{مساحت}=\iint_S d\sigma=\iint_R \sqrt{1+4(y^2+z^2)}\,dy\,dz=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{12}} r\sqrt{1+4r^2}\,dr\,d\theta$$

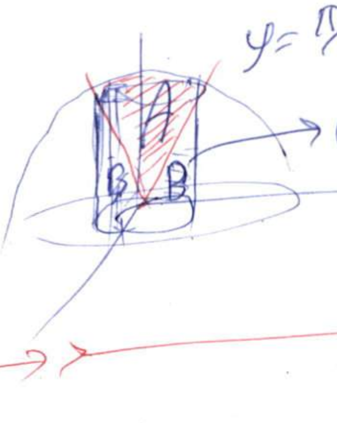
$$=\frac{\pi}{6}\left[7^3-1\right]=57\pi$$

$$\begin{cases} y=r\cos\theta \\ z=r\sin\theta \end{cases}$$

مثال ۱۸: انتگرال $\iiint_D f\,dD$ را در مختصات کروی بنویسید که در آن D ناحیه داخل استوانه $x^2+y^2=1$ محصور به کره $x^2+y^2+z^2=4$ و $z\geq 0$ است.

حل:

$$\iiint_D f\,dD=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6}\int_0^{2} \rho^2\sin\varphi\, f(\rho,\varphi,\theta)\,d\rho\,d\varphi\,d\theta+\int_0^{2\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_0^{\csc\varphi} \rho^2\sin\varphi\, f(\rho,\varphi,\theta)\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$



$\varphi=\frac{\pi}{6}$

$\rho=\frac{1}{\sin\varphi}=\csc\varphi$

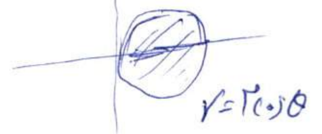
۸۶/۱۰/۱۵

مثال ۱۹: شار میدان $\vec F = xy^2\vec i + yx^2\vec j + x\vec k$ را در امتداد سطح بیرونی استوانه $x^2+y^2=2x$ که محدود به صفحات $z=0$ و $z=2$ است را حساب کنید.

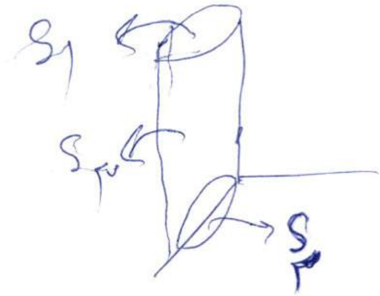
حل: روش اول طبق قضیه دیورژانس

$$\text{شار} = \iint_S (\vec F\cdot\vec n)\,d\sigma = \iiint_D \operatorname{div} F\,dv = \iiint_D (y^2+x^2)\,dv$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta}\int_0^{2} r^3\,dz\,dr\,d\theta = \dots = 3\pi$$



روش دوم با محاسبه مستقیم که وقت گیر است



$S = S_1\cup S_2\cup S_3$

$$\left.\begin{array}{l} S_1:\ z=2 \\ S_2:\ z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow d\sigma = dx\,dy \qquad n_1 = k,\quad n_2 = -k$$

$$S_3:\ x^2+y^2-2x=0 \Rightarrow y=\pm\sqrt{2x-x^2} \quad \begin{cases} y=\sqrt{2x-x^2} \\ y=-\sqrt{2x-x^2}\end{cases}$$

$$\iint_{S_1}(\vec F\cdot\vec n_1)\,d\sigma = \iint_{\text{دایره}} x\,dx\,dy \ ,\quad \iint_{S_2}(\vec F\cdot\vec n_2)\,d\sigma = -\iint_{\text{دایره}} x\,dx\,dy$$

دو جواب با هم حذف می‌شوند

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} \Rightarrow \iint_S (F\cdot n_3)\,d\sigma = 2\iint_{R_{xz}}\left[-xy^2\cdot\frac{(1-x)}{\sqrt{2x-x^2}} + yx^2 - 0\right]dx\,dz$$

$$= \iint_{R_{xz}}\left[\left(-\sqrt{2x-x^2}\right)(1-x) + x^2\sqrt{2x-x^2}\right]dx\,dz = \int_0^2\int_0^2\left[2x^2\sqrt{2x-x^2} + \sqrt{2x-x^2}\right]dx\,dz$$

۸۶/۱۰/۱۵

مثال ۲۰: اگر $\vec F = \vec i + x^3y^2\vec j + z\vec k$ میدان برداری باشد و انتگرال سطح $\iint_S (\operatorname{curl}\vec F\cdot\vec n)\,d\sigma$ که در آن S سطح $x^2+4y^2+z^2=4$ ، $z\geq 0$ را حساب کنید.

حل: طبق قضیه استوکس

$$\iint_S (\operatorname{curl}\vec F\cdot n)\,d\sigma = \oint_C F\cdot dR = \oint dx + x^3y^2\,dy + z\,dz = \int_0^{2\pi}\left[-2\sin\theta + 8\cos^4\theta\sin^2\theta\right]d\theta = \dots = \pi$$

$$C\begin{cases} x^2+4y^2=4 \\ z=0\end{cases} \quad \begin{cases} x=2\cos\theta \\ y=\sin\theta\end{cases} \quad \begin{cases} dx=-2\sin\theta\,d\theta \\ dy=\cos\theta\,d\theta\end{cases}$$

روش دوم: راه مستقیم

$\text{curl}\vec F = \vec\nabla\times\vec F = 3x^2y^2\vec K$

با مختصات

$$\iint_S (\text{curl}\vec F\cdot\vec n)\,d\sigma = \iint_R 3x^2y^2\,dx\,dy = 24\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^5\cos^2\theta\sin^2\theta\,dr\,d\theta = \dots = \pi$$

$$\begin{cases} x = 2r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Longrightarrow dx\,dy = 2r\,dr\,d\theta$$

۸۶/۳/۲۳

مثال ۲۱) فرض کنید که $\vec F = xy^2\vec i + xz\vec j + x^2z\vec K$ یک میدان نیرو باشد و فرض کنید که D ناحیه داخل مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ که از بالا به کره $x^2+y^2+z^2\le 4$ محصور شده است مطلوب است محاسبه شار خالص برونسوی F خارج از سطح S که شامل D است.

حل: در مختصات کروی حل می‌شود

$$\text{شار} = \iint_S (\vec F\cdot\vec n)\,d\sigma = \iiint_D \text{div}F\,dD = \iiint_D (y^2+x^2)\,dD$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^2 \rho^2\sin^2\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\varphi\,d\varphi\int_0^2\rho^4\,d\rho = (2\pi)\left(\frac{32}{5}\right)\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos^2\varphi)\sin\varphi\,d\varphi$$

$$=\frac{64\pi}{5}\left[-\cos\varphi+\frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{64\pi}{5}\left[\left(-\frac{\sqrt2}{2}+\frac{1}{6\sqrt2}\right)-\left[-1+\frac13\right]\right]$$

مثال ۲۲) مطلوب است محاسبه شار میدان $\vec F = z\vec i + x^2y\vec j + zy^2\vec K$ خارج از سطح جسم متشکل از سطوح $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ و $z = 2-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{3}$.

حل: طبق قضیه واگرایی

$\text{div}F = x^2+y^2$

$$\iint_S (\vec F\cdot\vec n)\,d\sigma = \iiint_D \text{div}F\,dD = \iiint_D (x^2+y^2)\,dD = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt3}\int_{\sqrt3 r}^{2-\frac{r}{\sqrt3}} r^3\,dz\,dr\,d\theta$$

تصویر در صفحه قطبی دایره‌ای با شعاع $r=\sqrt3$ است

$\sqrt3 r = 2-\frac{r}{\sqrt3} \Longrightarrow r=\sqrt3$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt3} r^3\left(2-\frac{r}{\sqrt3}-\sqrt3 r\right)dr = ?$$

۹۴/۳/۱۷

مثال ۲۳- مطلوب است محاسبه $I=\oint_C (e^{x^2}+y)\,dx+(\tan^{-1}y+3x)\,dy$ که منحنی C مرز ناحیه
$R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le x^2+y^2\le 4\}$ است.

حل: طبق قضیه گرین؛ چون توابع $M=e^{x^2}+y$ و $N=\tan^{-1}y+3x$ روی R و C پیوسته هستند و مشتقات جزئی آنها نیز روی R و C پیوسته‌اند و C مثبت است و $C=C_1\cup C_2$ قطعه‌قطعه هموار است.

$$I \overset{\text{قضیه گرین}}{=} \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dR=\iint_R (3-1)\,dR=2\iint_R dR=2[\text{R مساحت}]=2(4\pi-\pi)$$
$$=6\pi$$

مثال ۲۴- اگر C مرز نیم‌کره $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ باشد مطلوب است

$$I=\oint_C (x^2+x)\,dx+3xy\,dy+(2xz+z^2)\,dz$$

حل: طبق قضیه استوکس

$$I=\iint_S (\text{curl}F\cdot\vec n)\,d\sigma \overset{\text{نتیجه}}{=} \iint_R [-F_1f_x-F_2f_y+F_3]\,dR$$

$$=\iint (-2y+3y)\,dR=\int_0^{2\pi}\int_0^{2} r^2\sin\theta\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^2 r^2\,dr=0$$

$$\text{curl}F=\vec\nabla\times\vec F=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x^2+x & 3xy & 2xz+z^2\end{vmatrix}=\underbrace{-2z}_{F_2}\vec j+\underbrace{3y}_{F_3}\vec k \qquad F_1=0$$

$$z=f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}\Rightarrow f_x=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}},\quad f_y=\frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

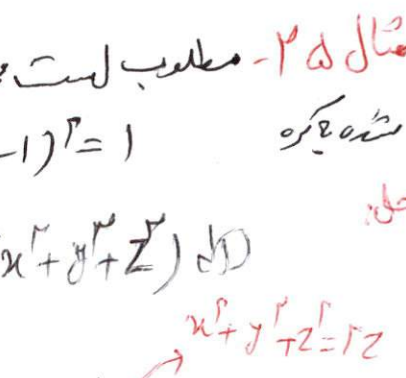
$$-F_1f_x-F_2f_x+F_3=0+\frac{-2yz}{\sqrt{4-x^2-y^2}}+3y=-2y+3y=y$$

مثال ۲۵- مطلوب است محاسبه شار میدان برداری $\vec F=x^3\vec i+y^3\vec j+z^3\vec k$ که در آن S سطح محدود شده به کره $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ می‌باشد که در داخل مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ واقع است.

حل:

$$\vec F \text{ شار گذرنده از } =\iint_S (\vec F\cdot\vec n)\,d\sigma \overset{\text{قضیه واگرایی}}{=} \iiint_D \text{div}\vec F\,dD=\iiint_D 3(x^2+y^2+z^2)\,dD$$

$$=3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\cos\varphi}\rho^4\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\cos\varphi}\rho^4\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi$$



$$=6\pi\int_0^{\pi/4}\frac{32}{5}\cos^5\varphi\sin\varphi\,d\varphi=\frac{192}{5}\pi\left[-\frac{\cos^6\varphi}{6}\right]_0^{\pi/4}=\frac{32\pi}{5}\left[1-\frac{1}{8}\right]=\frac{28}{5}\pi$$

مثال ۲۶: مطلوب است محاسبه مساحت سطح قسمتی از نیم کره $z=\sqrt{4a^2-x^2-y^2}$ که توسط استوانه $x^2+y^2=a^2$ بریده شده است.

حل: $d\sigma=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dR=\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{4a^2-x^2-y^2}}\,dR \Rightarrow \iint_S \frac{2a}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy \underset{\text{قطبی}}{=}$

$$2a\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\frac{r\,dr}{\sqrt{4a^2-r^2}}=4\pi a\left[-\sqrt{4a^2-r^2}\right]_0^{a}=4\pi a\left[2a-\sqrt{3}a\right]=4\pi a^2\left[2-\sqrt{3}\right]$$

واحد سطح

۹۳/۳/۱۱

مثال ۲۷- مساحت قسمتی از رویه $x^2+y^2+z^2=a^2$ که توسط $x^2+y^2=2x$ جدا شده است را بیابید.

حل: چون سطح از دو قسمت (دو نیم کره) تشکیل شده است پس

$$z=\pm\sqrt{4-x^2-y^2}\Rightarrow d\sigma=\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{4-x^2-y^2}}\,dR=\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,dx\,dy$$

$$\text{مساحت}=2\iint_{S\ \text{نیم کره}} d\sigma=4\iint_R\frac{dx\,dy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\underset{\text{قطبی}}{=}8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta}\frac{r\,dr\,d\theta}{\sqrt{4-r^2}}=$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\sqrt{4-r^2}\right]_0^{2\cos\theta}d\theta=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[2-2\sin\theta\right]d\theta=8\left[2\theta+2\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=8\left[\pi-2\right]$$

واحد سطح

مثال ۲۸- مطلوب است محاسبه شار قائم برون سوی میدان $\vec F=2xy^2\vec i+(z^2+yx^2)\vec j+z^3\vec k$ گذرنده از سطح $x^2+2y^2+3z^2=1$

حل:
$$\text{شار}=\iint_S(\vec F\cdot\vec n)\,d\sigma\ \underset{\text{دیورژانس}}{\overset{\text{قضیه}}{=}}\ \iiint_D \operatorname{div}F\,dD=\iiint_D(2y^2+x^2+3z^2)\,dD$$

$$\underset{\text{کروی تعمیم یافته}}{\overset{\text{دستگاه مختصات}}{=}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1}\rho^4\sin\varphi\times\frac{1}{\sqrt6}\,d\rho\,d\varphi\,d\theta=\frac{1}{\sqrt6}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^{1}\rho^4\,d\rho$$

$$=\frac{1}{\sqrt6}(2\pi)(2)\frac{1}{5}=\frac{4\pi}{5\sqrt6}$$

$$\begin{cases}x=\rho\sin\varphi\cos\theta\\ y=\frac{1}{\sqrt2}\rho\sin\varphi\sin\theta\\ z=\frac{1}{\sqrt3}\rho\cos\varphi\end{cases}\Rightarrow dD=\frac{1}{\sqrt6}\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

مثال ۲۹) با کمک قضیه گرین مساحت ناحیه محدود به منحنی $r=2\cos\theta$ را بیابید.

حل:
$$\text{مساحت}=\frac12\oint_C x\,dy-y\,dx=\frac12\times2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[4\cos^2\theta\cos2\theta+2\sin^2 2\theta\right]d\theta=$$

$\sin^2\theta$

$x=r\cos\theta=2\cos^2\theta\Rightarrow dx=-4\sin\theta\cos\theta\,d\theta$

$y=r\sin\theta=\sin2\theta\Rightarrow dy=2\cos2\theta\,d\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[4\cos^4\theta-4\cos^2\theta\sin^2\theta+2\sin^2 2\theta\right]d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[(1+\cos2\theta)^2+\left(\frac{1-\cos4\theta}{2}\right)\right]d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1+2\cos2\theta+\cos^2 2\theta+\frac12-\frac12\cos4\theta\right]d\theta=$$

در صفحه بعد

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{3}{2} + 2\cos 2\theta + \frac{1+\cos 4\theta}{2} - \frac{1}{2}\cos 4\theta \right] d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2 + 2\cos 2\theta \right] d\theta =$$

$$= 2\left[\theta + \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi$$

مثال ۳۰) فرض کنید که S مرز ناحیه محدود با صفحات $y-x=-2$ و $x+y=3$ و $x=2$ و $x=-2$ باشد، اگر C منحنی حاصل از تقاطع S با صفحه $z=2$ باشد،

الف) مطلوب است $\oint_C \vec F \cdot d\vec R$ جایی که $\vec F = 3xy\,\vec i + y^2\,\vec j + z\,\vec k$

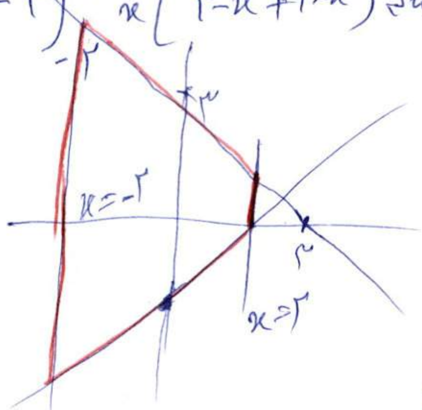
ب) صحت قضیه استوکس را برای منحنی از رویه $z=2$ که درون S قرار دارد را بررسی کنید.

حل (الف) $z=2 \Rightarrow dz=0 \Rightarrow \oint_C 3xy\,dx + y^2dy + z\,dz = \oint_C 3xy\,dx + y^2dy + 0$

C مرز چهارضلعی است.

$$\overset{\text{قضیه گرین}}{\Longleftarrow} \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(3xy) \right] dR = \iint_R -3x\,dR = \int_{-2}^{2}\int_{-2+x}^{3-x} -3x\,dy\,dx =$$

$$= -3\int_{-2}^{2} x\left[3-x+2-x \right] dx = -3\int_{-2}^{2} \left[5x - 2x^2 \right] dx = -3\left[\frac{5}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right]_{-2}^{2} = 32$$



ب)

$$\text{curl}\,\vec F = \vec\nabla \times \vec F = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3xy & y^2 & z \end{vmatrix} = -3x\,\vec k$$

$$z=2 \Rightarrow d\sigma = dx\,dy$$

$$\oint_C \vec F \cdot d\vec R = \iint_S (\text{curl}\,\vec F \cdot \vec N)\,d\sigma \overset{\text{نتیجه}}{=} \iint_R -3x\,dy\,dx \overset{\text{قسمت الف}}{=} 32$$

۹۳-۱۰-۷

مثال ۳۱) فرض کنید که C مرز ناحیه $R = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 4 \le x^2+y^2 \le 16\}$ باشد. انتگرال زیر را محاسبه کنید

حل

$$\oint (x^3 - x^2y)\,dx + xy^2\,dy \overset{\text{قضیه گرین}}{=} \iint_R (y^2+x^2)\,dR = \int_0^{2\pi}\int_2^4 r^3\,dr\,d\theta = 2\pi\left[\frac{1}{4}r^4 \right]_2^4 =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[(16)^2 - 16 \right] = \frac{16\times 15}{2}\pi = 120\pi$$

مثال ۳۲) فرض کنید که $\vec F = (x+y-4)\,\vec i + 3xy\,\vec j + (2xz+z^2)\,\vec k$ مطلوب است محاسبه $I = \iint_S \left[(\vec\nabla\times\vec F)\cdot\vec n \right] dS$ که در آن S نیم‌کره $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$ و $\vec n$ بردار قائم واحد بیرونی S است. حل: با کمک قضیه استوکس C را مرز S یعنی $\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ z=0 \end{cases}$ درنظر می‌گیریم

$$I = \int_C (x+y-4)\,dx + 3xy\,dy + (2x\underbrace{z}_{0}+\underbrace{z^2}_{0})\,dz = \int_C (x+y-4)\,dx + 3xy\,dy =$$

$$\overset{\text{قضیه گرین}}{=} \iint_R (3y+1)\,dR = \int_0^{2\pi}\int_0^4 r\left[3r\sin\theta + 1 \right] dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left[r^3\sin\theta + \frac{1}{2}r^2 \right]_0^4 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} [64\sin\theta + 8]\, d\theta = 16\pi$$

مثال ۳۲) مساحت قسمتی از کره $x^2+y^2+z^2=16$ را که بین صفحات $z=2$ و $z=3$ قرار دارد را حساب کنید.

حل:

$$z=\pm\sqrt{16-x^2-y^2} \Rightarrow S:\ z=\sqrt{16-x^2-y^2} \qquad R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 7\le x^2+y^2\le 12\}$$

$$d\sigma=\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{16-x^2-y^2}}\,dx\,dy = \frac{4}{\sqrt{16-x^2-y^2}}\,dx\,dy$$

$$\text{مساحت} =\iint_S d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_{\sqrt7}^{\sqrt{12}} \frac{4r\,dr\,d\theta}{\sqrt{16-r^2}} = 8\pi\left[-\sqrt{16-r^2}\right]_{\sqrt7}^{\sqrt{12}} = 8\pi[3-2]=8\pi$$

مثال ۳۳) اگر $\vec F=\frac14 x^3\vec i+\frac19 y^3\vec j+\frac1{16}z^3\vec k$ و S بیضی‌گون $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$ باشد، آنگاه شار گذرنده از این سطح را محاسبه کنید.

$$\text{شار} =\iint_S(\vec F\cdot\vec N)\,d\sigma = \iiint_D \operatorname{div}F\, dD = \iiint_D 3\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}\right) dD$$

$$\underset{\text{تعمیم یافته}}{\text{کروی}} = 72\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 \rho^4 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = \frac{288}{5}\pi$$

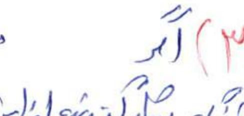
$$\begin{cases} x=2\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=3\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=4\rho\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow dD = 24\rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

۹۲/۱۰/۱۴

مثال ۳۴) مطلوب است محاسبه مساحت بخشی از رویه $z=\sqrt{x^2+y^2}$ که بین صفحه xy و استوانه $x^2+y^2=2y$ قرار دارد.

حل:

$$d\sigma=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dx\,dy=\sqrt2\,dx\,dy$$



$$\text{مساحت رویه} =\iint_S d\sigma=\iint_{\text{دایره}}\sqrt2\, dx\,dy=\sqrt2\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta} r\,dr\,d\theta=\sqrt2\int_0^{\pi}\left[\frac12 r^2\right]_0^{2\sin\theta}d\theta = 2\sqrt2\int_0^{\pi} \sin^2\theta\, d\theta$$

$$=2\sqrt2\int_0^{\pi}\frac{1-\cos2\theta}{2}\,d\theta=\sqrt2\pi$$ والصح

یا $\sqrt2\iint_R dx\,dy=\sqrt2\,($مساحت دایره به شعاع ۱$)=\sqrt2\pi$

مثال ۳۵) انتگرال منحنی الخط مقابل را که در آن C مرز منحنی است که صفحه $x+y+z=1$ از یک هشتم اول جدا می‌کند را حساب کنید.

$$I=\oint_C (y^2+z^2)\,dx+(x^2+z^2)\,dy+(x^2+y^2)\,dz$$

حل: روش اول طبق قضیه استوکس:

$$\operatorname{curl}F=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ M & N & P\end{vmatrix} = (2y-2z)\vec i-(2x-2z)\vec j+(2x-2y)\vec k$$

$$I \overset{\text{قضیه}}{\underset{\text{استوکس}}{=}} \iint_S[\operatorname{curl}\vec F\cdot\vec N]\,d\sigma \overset{\text{طبق تبصره}}{=} \iint_R\left[-(2y-2z)f_x+(2z-2x)f_y+(2x-2y)\right]dR=$$

$$z=f(x,y)=1-x-y \Rightarrow f_x=-1,\ f_y=-1$$

$$= \iint_R (2y-2z+2z-2x+2x-2y)\, dR = \iint_R 0\, dR = 0$$

روش دوم:

$$I = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{R} \xrightarrow[\text{استوکس}]{\text{قضیه}} \iint_S [\operatorname{curl}\vec{F}\cdot\vec{N}]\, d\sigma \xrightarrow[\text{دیورژانس}]{\text{قضیه}} \iiint_D \operatorname{div}(\operatorname{curl}\vec{F})\, dD = \iiint_D 0\, dD = 0$$

زیرا $\operatorname{div}(\operatorname{curl}\vec{F}) = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{F}) = 0$

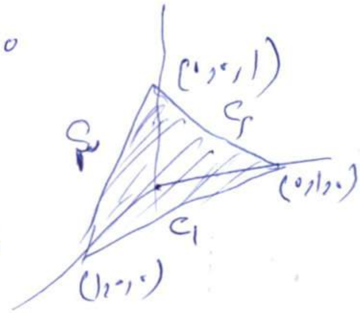
روش سوم:

C_1 مرز $z=0,\ x+y=1$

C_2 مرز $x=0$ و $y+z=1$

C_3 مرز $y=0,\ x+z=1$

$$\Rightarrow I_1 = \int_{C_1} y^2 dx + x^2 dy = \int_0^1 (1-x)^2 dx - x^2 dx = \int_0^1 (1-2x)\, dx = [x - x^2]_0^1 = 0$$



$$I_2 = \int_{C_2} z^2 dy + y^2 dz = \int_0^1 (1-y)^2 dy - y^2 dy = 0$$

همینطور I_3

$$I_3 = \int_{C_3} z^2 dx + x^2 dz = 0$$

همینطور I_2 و I_3 داریم

پس

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 0+0+0 = 0$$

مثال ۳۶) شار بردار سوی میدان

$$\vec{F} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{x^2+y^2+z^2}$$

گذرنده از مرزهای ناحیه زیر را بیابید

$$D = \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4\}$$

حل: طبق قضیه دیورژانس چون S بسته است و $\vec{F}$ روی S، D (داخل S) بطور پیوسته مشتق پذیر است داریم:

$$\text{شار } \vec{F} \text{ گذرنده از } S = \iint_S (\vec{F}\cdot\vec{N})\, d\sigma = \iiint_D \operatorname{div} F\, dD = \iiint_D \frac{dD}{x^2+y^2+z^2} \xrightarrow{\text{دستگاه کروی}} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^2 \frac{\rho^2}{\rho^2}$$

θ ...

$$\operatorname{div} F = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{y^2+z^2-x^2+x^2+z^2-y^2+x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi \int_1^2 d\rho = 2\pi \times 2 \times 1 = 4\pi$$

مثال ۳۷) انتگرال منحنی الخط

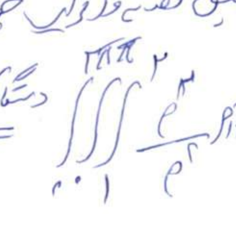
$$I = \oint_C xy^2 dx + (x^2y + 2x)\, dy$$

که در آن C مرز مربع $|x|+|y|=1$ است را بیابید.

حل:

$$I = \oint_C xy^2 dx + (x^2y+2x)\, dy \xrightarrow[\text{گرین}]{\text{قضیه}} \iint_R [2xy + 2 - 2yx]\, dR = \iint_R 2\, dR = 2(\text{مساحت مربع})$$

$$= 2\times 2 = 4$$



۹۲/۳/۱۴

مثال ۳۸) به کمک قضیه گرین مساحت ناحیه محصور بین منحنی $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ $(a>0)$ را بیابید.

حل:

$$\begin{cases} x = a\cos^3\theta \\ y = a\sin^3\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = -3a\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta \\ dy = 3a\sin^2\theta\cos\theta\, d\theta \end{cases} \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

مساحت $= \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[3a^2\sin^2\theta\cos^4\theta + 3a^2\sin^4\theta\cos^2\theta\right]d\theta =$

$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 3a^2\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta = \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\sin^2 2\theta\,d\theta = \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4\theta}{8}\,d\theta = \frac{3}{2}a^2\left[\frac{2\pi}{8}\right] = \frac{3\pi}{8}a^2$ واحد مربع

مثال ۳۹) شار خالص برونسوی میدان برداری $\vec{F} = (y^2+z)\vec{i} + (x^3-y)\vec{j} + (3z+xz)\vec{k}$ گذرنده از سطح $z = 9-x^2-y^2$ و $z \geq 0$ را بیابید.

حل: روش اول

شار $= \iint_S (\vec{F}\cdot\vec{n})\,d\sigma \xlongequal{\text{تبصره}} \iint_{\text{دایره}} \left[-Mf_x - Nf_y + P\right]dx\,dy =$

$= \iint_{\text{دایره}} \left[2x(y^2+z) + 2y(x^3-y) + 3z + xz\right]dx\,dy = \iint_{\text{دایره}} \left[2x(9-x^2) + 2yx^3 - y^2 + (3+x)(9-x^2-y^2)\right]dx\,dy$

$= \iint_{\text{دایره}} \left[18x - 2x^3 + 2yx^3 - y^2 + 27 - 3x^2 - 3y^2 + 9x - \cancel{x^3} - xy^2\right]dx\,dy =$

$= \iint_R \left[27 + 27x - 3(x^2+y^2) - y^2 + 2yx^3 - xy^2 - 3x^3\right]dx\,dy \xLeftarrow{\text{در مختصات قطبی}}$

$= \int_0^{2\pi}\int_0^3 \left[27 + 27r\cos\theta - 3r^2 - r^2\sin^2\theta + 2r^4\sin\theta\cos^3\theta - r^3\cos\theta\sin^2\theta - 3r^3\cos^3\theta\right] r\,dr\,d\theta$

$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{27}{2}r^2 + 9r^3\cos\theta - \frac{3}{4}r^4 - \frac{1}{4}r^4\sin^2\theta + \frac{1}{3}r^6\sin\theta\cos^3\theta - \frac{1}{5}r^5\cos\theta\sin^2\theta - \frac{3}{5}r^5\cos^3\theta\right]_0^3 d\theta$

$= 81\pi$

روش دوم: چون سطح S باز است با صفحه z=0 می‌بندیم تا سطح بسته شود و قضیه واگرایی برقرار شود

شار $\vec{F}$ گذرنده از T $= \iint_T (\vec{F}\cdot\vec{n})\,d\sigma = \iiint_D \operatorname{div}\vec{F}\,dD = \iiint_D \left[-1+3+x\right]dD = \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^{9-r^2} (2 + r\cos\theta)\,r\,dz\,dr\,d\theta$

$\boxed{\text{که } S_1 \text{ صفحه } z=0 \text{ است}\quad T = S\cup S_1}$

$= \int_0^{2\pi}\int_0^3 \left[2r + r^2\cos\theta\right]\left[9-r^2\right]dr\,d\theta =$

$= \int_0^{2\pi}\left[9r^2 - \frac{1}{2}r^4 + \cos\theta\left(3r^3 - \frac{1}{5}r^5\right)\right]_0^3 d\theta = \int_0^{2\pi}\left[81 - \frac{81}{2} + \left(81 - \frac{243}{5}\right)\cos\theta\right]d\theta$

$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{81}{2} + \frac{162}{5}\cos\theta\right]d\theta = 81\pi \Longrightarrow \iint_{S_1}\left[\vec{F}\cdot\vec{n}_1\right]d\sigma_1 + \iint_{S_2}\left[\vec{F}\cdot\vec{n}_2\right]d\sigma_2 = 81\pi$

$\Rightarrow$ شار $\vec{F}$ $= \iint_{S_2}\left[\vec{F}\cdot\vec{n}_2\right]d\sigma_2 = 81\pi - \iint_{S_1}\left[\vec{F}\cdot\vec{n}_1\right]d\sigma_1 = 81\pi - \iint\left[-3\underset{0}{z} + x\underset{0}{z}\right]dx\,dy$

0

$= 81\pi$

$S_1\begin{cases} z = 0 \\ n_1 = -\vec{k}\end{cases} \Rightarrow d\sigma_1 = dx\,dy$

مثال ۴۰) انتگرال سطح $\iint_S \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+z^2}}$ را حساب کنید که در آن S بخشی از سهمیوی هذلولی $y=xz$ است که توسط استوانه $x^2+z^2=4$ جدا شده است.

حل

$$y=f(x,z)=xz \Rightarrow d\sigma=\sqrt{1+x^2+z^2}\,dx\,dz$$

$$\iint_S \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+z^2}} = \iint_{\text{دایره}} \frac{\sqrt{1+x^2+z^2}}{\sqrt{x^2+z^2}}\,dz\,dx \overset{\text{قطبی}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^{2} \frac{\sqrt{1+r^2}}{r}\,r\,dr\,d\theta =$$

$$=2\pi\left[\frac{1}{2}\ln\left(r+\sqrt{1+r^2}\right)+\frac{1}{2}r\sqrt{1+r^2}\right]_0^2 = \pi\left[\ln(2+\sqrt5)+2\sqrt5\right]$$

مثال ۴۱) انتگرال خط زیر را حل کنید.

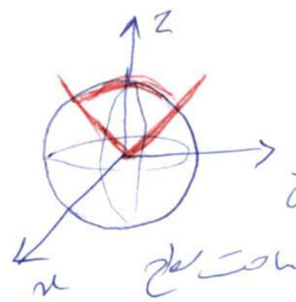
$$I=\int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} 2x\,dx+(z^2+2y)\,dy+2yz\,dz$$

حل چون $\vec F=2x\vec i+(z^2+2y)\vec j+2yz\vec k$ و $\text{curl}\vec F=\vec\nabla\times\vec F=0$ پس انتگرال مستقل از مسیر است و $\vec F\cdot d\vec R=d(x^2+yz^2+y^2)$

$$\Rightarrow I=\int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} d(x^2+yz^2+y^2)=\left[x^2+yz^2+y^2\right]_{(0,0,0)}^{(1,2,3)}=1+4+18=23$$

۹۱/۱۰/۲۴

مثال ۴۲) مطلوب است محاسبه مساحت عرقچینی که مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ از کره $x^2+y^2+z^2=2$ جدا می‌کند. حل:



$$z=\sqrt{2-x^2-y^2} \Rightarrow d\sigma=\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{2-x^2-y^2}}\,dx\,dy$$

$$\Rightarrow d\sigma=\frac{\sqrt2}{\sqrt{2-x^2-y^2}}\,dx\,dy$$

$$R:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2 \\ z^2=x^2+y^2 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=1$$

$$\text{مساحت سطح}=\iint_S d\sigma=\iint_R \frac{\sqrt2}{\sqrt{2-x^2-y^2}}\,dx\,dy \overset{\text{قطبی}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^{1} \frac{\sqrt2}{\sqrt{2-r^2}}\,r\,dr\,d\theta =$$

$$=2\pi\sqrt2\left[-\frac{1}{2}\sqrt{2-r^2}\right]_0^1=\left[2-\sqrt2\right]\pi$$

مثال ۴۳) فرض کنید که S سطح $4x^2+9y^2+36z^2=36$ باشد و $\vec F=\frac{1}{27}x^3\vec i+\frac{1}{12}y^3\vec j+\frac{1}{3}z^3\vec k$ مطلوب است محاسبه $\iint_S(\vec F\cdot\vec n)\,d\sigma$ که در آن $\vec n$ بردار قائم واحد برونسوی S است.

حل: طبق قضیه واگرایی

$$\iint_S(\vec F\cdot\vec n)\,d\sigma=\iiint_D \text{div}\vec F\,dD=\iiint_D\left(\frac{1}{9}x^2+\frac{1}{4}y^2+z^2\right)dD$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} 6\rho^4\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta = 6\times2\pi\times2\times\frac{1}{5}=\frac{24}{5}\pi$$

در مختصات کروی تعمیم یافته

$$\begin{cases} x=3\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=2\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow dD=6\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

ژاکوبین

۴۴) اگر منحنی C فصل مشترک صفحه $x+y+z=2$ و استوانه $x^2+y^2=4$ باشد مطلوب است محاسبه انتگرال منحنی الخط زیر

حل: ۲ روش وجود دارد: از قضیه استوکس:

$$I=\oint_C z^2dx+x^2dy+y\,dz$$

$$\operatorname{curl}\vec{F}=\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z^2 & x^2 & y\end{vmatrix}=\vec{i}+2z\vec{j}+2x\vec{k}$$

تصویر S در صفحه xoy ناحیه $x^2+y^2=4$ داخل دایره است

$$I=\oint_C z^2dx+x^2dy+y\,dz=\iint_S(\operatorname{curl}\vec{F}\cdot\vec{n})\,d\sigma=\iint_S\left[(\vec{i}+2z\vec{j}+2x\vec{k})\cdot\vec{n}\right]d\sigma$$ نتیجه

$$=\iint_{\text{دایره}}\left[-F_1\frac{\partial z}{\partial x}-F_2\frac{\partial z}{\partial y}+F_3\right]dR=\iint_{\text{دایره}}\left[1+2z+2x\right]dR=\iint_{\text{دایره}}\left[1+2(2-x-y)+2x\right]dR$$

$$=\iint_{\text{دایره}}[5-2y]\,dR\overset{\text{قطبی}}{=}\int_0^{2\pi}\int_0^2[5r-2r^2\sin\theta]\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\left[\frac{5}{2}r^2-\frac{2}{3}r^3\sin\theta\right]_0^2d\theta=$$

$$z=2-x-y\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=-1,\ \frac{\partial z}{\partial y}=-1$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[10-\frac{16}{3}\sin\theta\right]d\theta=\left[10\theta+\frac{16}{3}\cos\theta\right]_0^{2\pi}=20\pi$$

توجه: این مسئله را می‌توان از روش پارامتری حل کرد

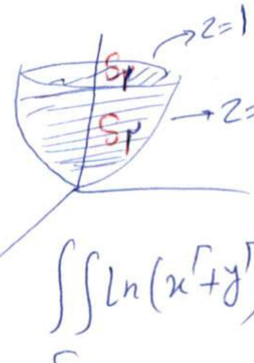
معادله پارامتری C
$$\begin{cases}x=2\cos\theta\\ y=2\sin\theta\\ z=2-2\cos\theta-2\sin\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}dx=-2\sin\theta\,d\theta\\ dy=2\cos\theta\,d\theta\\ dz=(2\sin\theta-2\cos\theta)\,d\theta\end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\int_0^{2\pi}(2-2\cos\theta-2\sin\theta)^2(-2\sin\theta)\,d\theta+4\cos^2\theta\cdot2\cos\theta\,d\theta+2\sin\theta(2\sin\theta-2\cos\theta)\,d\theta$$

$$=\dots=20\pi$$

۴۵) انتگرال سطح $\iint_S\ln(x^2+y^2)\,d\sigma$ را حساب کنید که در آن S مرز ناحیه $x^2+y^2\le z\le1$ است

این سؤال در مبداء مشکل دارد.



$$S=S_1\cup S_2$$

$$S_1:\ z=1\Rightarrow d\sigma_1=dx\,dy$$

$$S_2:\ z=x^2+y^2\Rightarrow d\sigma_2=\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy$$

$$\iint_S\ln(x^2+y^2)\,d\sigma=\iint_{S_1}\ln(x^2+y^2)\,d\sigma_1+\iint_{S_2}\ln(x^2+y^2)\,d\sigma_2=\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\ln(r^2)\,dr\,d\theta+$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\ln(r^2)\sqrt{1+4r^2}\,dr\,d\theta==4\pi\left[\frac{1}{2}r^2\ln r-\frac{1}{4}r\right]_0^1+\frac{\pi}{3}\left[(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}\ln r\right]_0^1-$$

$$-\frac{\pi}{3}\int_0^1\frac{(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}}{r}\,dr$$

با تغییر متغیر $r=\frac{1}{2}\tan\theta$ قابل حل است

$$(*)\int_0^1\frac{(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}}{r}\,dr=\left[(1+4r^2)^{\frac{3}{3}}+\sqrt{1+4r^2}+\ln\left|\frac{1-\sqrt{1+4r^2}}{2r}\right|\right]_0^1=?$$

در صفحه ۱۸ حل شده است

مثال ۴۶) مطلوب است محاسبه $\int y^2dx + x^4dy$ که در آن C نیمه بالایی بیضی $2x^2+y^2=1$ می‌باشد و جهت C خلاف عقربه‌های ساعت است (از قضیه گرین استفاده کنید).

حل: چون منحنی C بسته نیست مرز $y=0$ را به آن اضافه می‌کنیم تا بسته شود و قضیه گرین برقرار گردد و مرز $y=0$ در انتگرال منحنی الخط بی‌تاثیر است زیرا

$$\int_C 0\,dx + x^2d(0) = 0$$

پس داریم $\gamma = C\cup C_1$ که $C_1: y=0$ و $C: 2x^2+y^2=1$

$$\int_C y^2dx + x^4dy + \int_{C_1} y^2dx + x^4dy = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(x^4) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2)\right]dR = \iint_R (4x^3-2y)\,dR$$

قطبی تعمیم یافته

$$\int_0^\pi\int_0^1 \frac{1}{\sqrt2}r\left[\frac{4}{2\sqrt2}r^3\cos^3\theta - 2r\sin\theta\right]dr\,d\theta = \frac{1}{\sqrt2}\int_0^\pi\left[\frac{1}{2\sqrt2}r^4\cos^3\theta - \sin\theta\, r^2\right]_0^1 d\theta$$

$$= \frac{1}{\sqrt2}\int_0^\pi\left[\frac{1}{2\sqrt2}\cos^3\theta - \sin\theta\right]d\theta = \frac14\int_0^\pi(1-\sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta - \frac{1}{\sqrt2}\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta =$$

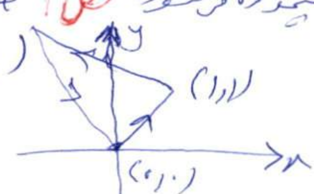
$$= \frac14\left[\theta - \frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^\pi + \frac{1}{\sqrt2}\left[\cos\theta\right]_0^\pi = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\sqrt2}$$

$$2x^2+y^2=1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac12}+y^2=1 \quad \begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt2}r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow dx\,dy = \frac{1}{\sqrt2}r\,dr\,d\theta$$

۹۱/۳/۲۰

مثال ۴۷) مطلوب است محاسبه انتگرال خط $I=\oint_C (x^3+3\tan y)dx + (3x\sec^2y+4x)dy$ روی منحنی بسته C که عبارت است از مثلثی با رئوس (0,0) و (1,1) و $(-\frac32,\frac32)$ که خلاف عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود.

حل ۱: طبق قضیه گرین $M = x^3+3\tan y$ و $N = 3x\sec^2y+4x$



$$I=\oint_C (x^3+3\tan y)dx + (3x\sec^2y+4x)dy =$$

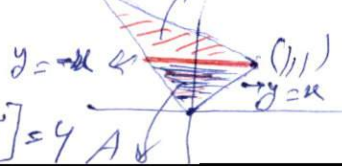
$$= \iint_R\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)dR = \iint_R\left[3\sec^2y+4-3\sec^2y\right]dy = \iint_R 4\,dR = 4(\text{مساحت مثلث})$$

$$= \frac42\left(\sqrt2\times\frac{3}{\sqrt2}\right) = 6$$

مثلث قائم‌الزاویه است و زاویه راس °۹۰ است

و طول ضلع (0,0) تا (1,1) برابر $\sqrt2$ و طول ضلع (0,0) تا $(-\frac32,\frac32)$ برابر $\frac{3}{\sqrt2}$ است

$$4\iint_{\text{مثلث}} dR = 4\iint_A dR + 4\iint_B dR = 4\int_0^1\int_{-y}^{y}dx\,dy + 4\int_1^{\frac32}\int_{-y}^{6-5y}dx\,dy$$



$$= 4\int_0^1 2y\,dy + 4\int_1^{\frac32}(6-4y)\,dy = 4+4\left[6y-2y^2\right]_1^{\frac32} = 4+4\left[9-\frac92-6+2\right] = 6$$

**در مثال ۴۵) به انتگرال $\int \frac{(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}}{r}dr$ رسیدیم که به صورت زیر حل می‌شود.

$r=\frac{1}{2}\tan\theta \Rightarrow dr=\frac{1}{2}\sec^2\theta\, d\theta$, $1+4r^2=1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$

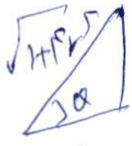
$$\int \frac{(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}}{r}dr = \int \frac{\sec^3\theta\cdot\frac{1}{2}\sec^2\theta}{\frac{1}{2}\tan\theta}d\theta = \int\frac{\sec^5\theta\, d\theta}{\tan\theta} = \int\frac{d\theta}{\cos^4\theta\sin\theta} = \int\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^4\theta\sin\theta}d\theta$$

$$=\int\frac{\sin\theta}{\cos^4\theta}d\theta+\int\frac{d\theta}{\cos^2\theta\sin\theta} = \int\frac{\sin\theta}{\cos^4\theta}d\theta+\int\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta\sin\theta}d\theta = \int\frac{\sin\theta\, d\theta}{\cos^4\theta}+\int\frac{d\theta}{\sin\theta}+\int\frac{\sin\theta\, d\theta}{\cos^2\theta}$$

$\boxed{\cos\theta = u \Rightarrow du=-\sin\theta\, d\theta}$

$$= -\int\frac{du}{u^4}-\frac{du}{u^2}+\ln|\csc\theta-\cot\theta|+C$$

$$=\frac{1}{\cos^3\theta}+\frac{1}{\cos\theta}+\ln|\csc\theta-\cot\theta|+C = (1+4r^2)^{\frac{3}{2}}+\sqrt{1+4r^2}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}\right|+C$$



مثال ۴۸) فرض کنید که $\vec F = y\vec i + xy\vec j + z^2\vec k$ یک میدان برداری باشد و همچنین S رویه $z=1-4x^2-9y^2$ ، $z\geq 0$ باشد، آنگاه مطلوبست محاسبه انتگرال $\iint_S [\text{curl}\vec F\cdot\vec n]\, d\sigma$

حل: طبق قضیه استوکس:

$$\iint_S(\text{curl}\vec F\cdot \vec n)\,d\sigma = \oint_C y\,dx+xy\,dy+z^2dz = \int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{6}\sin^2\theta+\frac{1}{18}\cos^2\theta\sin\theta\right)d\theta = -\frac{\pi}{6}$$

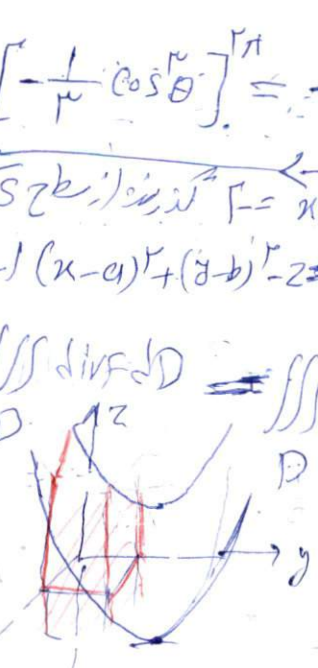
$$C\begin{cases} z=0 \\ 4x^2+9y^2=1\end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{4}}+\frac{y^2}{\frac{1}{9}}=1 \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}\cos\theta \\ y=\frac{1}{3}\sin\theta\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dz=0 \\ dx=-\frac{1}{2}\sin\theta\, d\theta \\ dy=\frac{1}{3}\cos\theta\, d\theta\end{cases}$$

زیرا $\int_0^{2\pi} -\frac{1}{6}\left(\frac{1-\cos2\theta}{2}\right) + \frac{1}{18}\left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{2\pi} = -\frac{\pi}{6}$

مثال ۴۶) شار میدان $\vec F = x\vec i+y\vec j+z\vec k$ گذرنده از سطح S که در آن S مرز ناحیه محدود با رویه‌های $(x-a)^2+(y-b)^2-z=1$ و $(x-a)^2+(y-b)^2-z=3$ و $|x|+|y|=1$ است (راهنمایی: $|x|+|y|=1$ یک استوانه با قاعده‌ی مربع شکل لوزی است) حل:

$$\text{شار}=\iint_S(\vec F\cdot\vec n)\,d\sigma \overset{\text{قضیه دیورژانس}}{=} \iiint_D \text{div}\vec F\, dD = \iiint_D 3\, dD = 3(\text{حجم } D) = 3(\text{مساحت قاعده}\times\text{ارتفاع})$$

$=3\times2\times2=12$



یک چهارم شکل

توضیح در صفحه بعد

$$3\iiint_D dD = 3\iint_R \int_{(x-a)^2+(y-b)^2-2}^{(x-a)^2+(y-b)^2+1} dz\, dR = 3\iint_R \left[\cancel{(x-a)^2}+\cancel{(y-b)^2}+1-\cancel{(x-a)^2}-\cancel{(y-b)^2}+2\right] dR$$

$$= 3\iint_R 3\, dR = 9(\text{مساحت ناحیه}) = 9\times 4 = 36$$

مثال ۵۰) انتگرال رویه‌ای $\iint_S \sqrt{x^2+y^2}\,(1+z^2)\,d\sigma$ را محاسبه کنید که در آن S بخشی از مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ بوده که توسط استوانه $x^2+y^2=4x$ جدا شده است.

حل:

$$d\sigma=\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dx\,dy=\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}\,dx\,dy=\sqrt{2}\,dR$$

$$\iint_S \sqrt{x^2+y^2}\,(1+z^2)\,d\sigma=\iint_R \sqrt{x^2+y^2}\,(1+x^2+y^2)\sqrt{2}\,dR \xrightarrow[\text{قطبی}]{\text{مختصات}} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{4\cos\theta}\sqrt{2}\,r^2(1+r^2)\,dr\,d\theta$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^3}{3}+\frac{r^5}{5}\right]_0^{4\cos\theta}d\theta=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{64}{3}\cos^3\theta+\frac{4^5}{5}\cos^5\theta\right]d\theta=$$

$$=\frac{128\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta+\frac{2^{11}\sqrt{2}}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)^2\cos\theta\,d\theta=\frac{128\sqrt{2}}{3}\left[\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+$$

$$+\frac{2^{11}\sqrt{2}}{5}\left[\sin\theta-\frac{2}{3}\sin^3\theta+\frac{\sin^5\theta}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{128\sqrt{2}}{3}\left[1-\frac{1}{3}\right]+\frac{2^{11}\sqrt{2}}{5}\left[1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right]=\left[\frac{2^8}{9}+\frac{2^{14}}{75}\right]\sqrt{2}$$

$$=\frac{2^8}{3}\left[\frac{1}{3}+\frac{2^6}{25}\right]\sqrt{2}$$

۹۰/۱۰/۲۵

مثال ۵۱) انتگرال سطح $\iint_S \ln x\, d\sigma$ را در صورتی که S بخشی از مخروط $x=\sqrt{y^2+z^2}$ باشد که بین صفحات $x=1$ و $x=2$ قرار دارد حساب کنید.

حل: R ناحیه بین دو دایره $y^2+z^2=1$ و $y^2+z^2=4$ است.

$$d\sigma=\sqrt{1+\frac{y^2+z^2}{y^2+z^2}}\,dy\,dz=\sqrt{2}\,dy\,dz$$

$$\iint_S \ln x\,d\sigma=\iint_R \ln(y^2+z^2)\,dy\,dz \overset{\text{قطبی}}{=} \int_0^{2\pi}\int_1^2 r\ln r^2\,dr\,d\theta=4\pi\int_1^2 r\ln r\,dr=$$

$$=4\pi\left[\frac{r^2}{2}\ln r-\frac{1}{4}r^2\right]_1^2=4\pi\left[2\ln 2-1+\frac{1}{4}\right]=4\pi\left[2\ln 2-\frac{3}{4}\right]$$

مثال ۵۲) مطلوب است محاسبه $I=\oint_C xy^2dx+yz^2dy+zx^3dz$ که در آن C فصل مشترک $x^2+y^2=1$ و $x+y+z=1$ است.

حل: از روش اول طبق قضیه استوکس

$$S: z=1-x-y \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=-1,\ \frac{\partial z}{\partial y}=-1$$

$$\operatorname{Curl}\vec{F}=\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ xy^2&yz^2&zx^3\end{vmatrix}=-2yz\,\vec{i}-3zx^2\,\vec{j}-2xy\,\vec{k}$$

$$I=\iint_S(\operatorname{Curl}\vec{F}\cdot\vec{n})\,d\sigma \overset{\text{شیب}}{=} \iint_R\left[2yz+3x^2z-2xy\right]dR=\iint_R\left[(2y+3x^2)(1-x-y)-2xy\right]dR$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1\left[(2r\sin\theta+3r^2\cos^2\theta)(1-r\cos\theta-r\sin\theta)-2r^2\cos\theta\sin\theta\right]r\,dr\,d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1\left[2r^2\sin\theta-2r^3\cos\theta-2r^3\sin^2\theta+3r^3\cos^2\theta-3r^4\cos^3\theta-3r^4\cos^2\theta\sin\theta-2r^3\cos\theta\sin\theta\right]dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\underbrace{\tfrac{2}{3}\sin\theta-\tfrac{1}{4}\cos\theta}-\tfrac{1}{2}\sin^2\theta+\tfrac{3}{4}\cos^2\theta-\tfrac{3}{5}\cos^3\theta-\tfrac{3}{5}\cos^2\theta\sin\theta-\tfrac{1}{2}\cos\theta\sin\theta\right]d\theta$$

$$=\left[-\tfrac{1}{6}\cos\theta-\tfrac{1}{2}\sin\theta\right]_0^{2\pi}+\tfrac{3}{4}\int_0^{2\pi}\left(\tfrac{1+\cos2\theta}{2}\right)d\theta-\tfrac{3}{5}\int_0^{2\pi}(1-\sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta+\left[\tfrac{1}{5}\cos^3\theta+\tfrac{1}{8}\cos2\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$=\tfrac{3}{4}\left[\tfrac{1}{2}(2\pi)\right]=\tfrac{3}{4}\pi$$

روش دوم (مستقیم و پارامتری کردن)

$$C\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=1-x-y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\cos\theta\\ y=\sin\theta\\ z=1-\cos\theta-\sin\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}dx=-\sin\theta\,d\theta\\ dy=\cos\theta\,d\theta\\ dz=(-\cos\theta+\sin\theta)\,d\theta\end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\int_0^{2\pi}\left[-\cos\theta\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta(1-\sin\theta-\cos\theta)^2+\cos^2\theta(1-\sin\theta-\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)\right]d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[-\cos\theta\sin^3\theta+2\sin\theta\cos\theta-2\sin^2\theta\cos\theta-2\sin\theta\cos^2\theta+2\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^2\theta\sin\theta-\cos^4\theta-\cos^3\theta\sin^2\theta\right.$$

$$\left.+\cos^3\cancel{\theta\sin\theta}-\cos^2\cancel{\theta\sin\theta}+\cos^5\theta\right]d\theta=?$$

مثال ۵۳) مطلوب است محاسبه $\iint(\vec F\cdot\vec n)\,d\sigma$ که در آن S سطح بسته‌ای متشکل از نیم‌کره بالایی $x^2+y^2+z^2=4$ است که با صفحه $z=0$ محدود است و V درون آن می‌باشد و $\vec n$ بردار واحد قائم خارجی بر سطح بسته می‌باشد. $\vec F=x^3\vec i+y^3\vec j+z^3\vec k$

حل: طبق قضیه دیورژانس $\operatorname{div}F=3(x^2+y^2+z^2)$

$$\iint_S(\vec F\cdot\vec n)\,d\sigma=\iiint_D\operatorname{div}\vec F\,dD=3\iiint_D(x^2+y^2+z^2)\,dD\ \overset{\text{مختصات}}{\underset{\text{کروی}}{=}}\ 3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^2\rho^4\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

$$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\pi/2}^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^2\rho^4\,d\rho=6\pi\left[-\cos\varphi\right]_{\pi/2}^{\pi}\left[\frac{2^5}{5}\right]=\frac{192}{5}\pi$$

۲۸/۳/۹۰ یکی از سوالات قبلی در حل تمرین ۹ آمده است

مثال ۵۴) مساحت سطح آن قسمتی از استوانه $x^2+y^2=a^2$ که داخل استوانه $y^2+z^2=a^2$ واقع است را بیابید.

$$S:\ x^2+y^2=a^2\Rightarrow x=\pm\sqrt{a^2-y^2}\Rightarrow d\sigma=\sqrt{1+\frac{y^2}{a^2-y^2}}\,dy\,dz=\frac{a}{\sqrt{a^2-y^2}}\,dy\,dz$$

$$S_{\text{مساحت}}=2\iint_S d\sigma=2\iint_R\frac{a\,dy\,dz}{\sqrt{a^2-y^2}}=2a\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}}\frac{dz\,dy}{\sqrt{a^2-y^2}}=4a\int_{-a}^{a}dy=8a^2\ \text{واحد مربع}$$

مثال ۵۵) شار میدان $\vec{F}=xy^2\vec{i}+yz^2\vec{j}+zx^2\vec{k}$ را خارج از سطح کره $x^2+y^2+z^2=9$ بدست آورید. حل: طبق قضیه دیورژانس

$$\operatorname{div}F=y^2+z^2+x^2$$

$$\text{شار}=\iint_S(\vec{F}\cdot\vec{n})\,d\sigma=\iiint_D \operatorname{div}\vec{F}\,dD=\iiint_D(x^2+y^2+z^2)\,dD=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{3}\rho^4\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^{3}\rho^4\,d\rho=(2\pi)(2)\frac{3^5}{5}=\frac{4\pi}{5}(3)^5$$

مثال ۵۶) انتگرال خط $\oint_C \frac{xy^2}{9}dy-\frac{x^2y}{4}dx$ که در آن C منحنی $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ است را حل کنید.

حل: طبق قضیه گرین

$$\oint_C \frac{xy^2}{9}dy-\frac{x^2y}{4}dx=\iint_R\left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}\right)dR=\iint_{\text{بیضی}}\left(\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{4}\right)dR \xrightarrow[\text{یافته}]{\text{قطبی تعمیم}}$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{1}6r^3\,dr\,d\theta=2\pi\times\frac{6}{4}=3\pi$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1\Rightarrow\begin{cases}x=2r\cos\theta\\ y=3r\sin\theta\end{cases}\Rightarrow dx\,dy=6r\,dr\,d\theta$$

۱۹-۱۰-۲۵

مثال ۵۷) انتگرال منحنی الخط زیر را که در آن منحنی C بیضی $2x^2+y^2=1$ است را حساب کنید.

حل: طبق قضیه گرین داریم:

$$I=\oint_C\left(x^3-\frac{2}{3}y^3\right)dx+\left(y^3+\frac{4}{3}x^3\right)dy$$

$$I=\iint_R\left[\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right]dR=\iint_R(4x^2+2y^2)\,dR=2\iint_R(2x^2+y^2)\,dR \xrightarrow[\text{تعمیم یافته}]{\text{قطبی}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{1}r^3\,dr\,d\theta=\frac{4\pi}{4\sqrt{2}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{x^2}{\frac{1}{2}}+y^2=1\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt{2}}r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}\Rightarrow dx\,dy=\frac{1}{\sqrt{2}}r\,dr\,d\theta$$

مثال ۵۸) مساحت سطح جانبی جسم محدود بین دو استوانه $x^2+y^2=25$ و $x^2+z^2=25$ را حساب کنید.

حل: می‌توان فرض کرد که S استوانه $x^2+z^2=25$ و تصویر آن دایره $x^2+y^2=25$ است (در صفحه xoy)

$z=\pm\sqrt{25-x^2}$ در نتیجه

$$d\sigma=\sqrt{1+\frac{x^2}{25-x^2}}\,dx\,dy=\frac{5}{\sqrt{25-x^2}}\,dx\,dy$$

مساحت سطح استوانه $x^2+z^2=25$ $= 2\iint_S d\sigma = 2\iint_R \frac{5}{\sqrt{25-x^2}}\,dx\,dy = 8\int_0^5\int_0^{\sqrt{25-x^2}} \frac{5\,dy\,dx}{\sqrt{25-x^2}} = 40\int_0^5 dx = 120$

و به همین صورت مساحت سطح $y^2+x^2=25$ که تصویر آن $x^2+z^2=25$ در صفحه xoz است برابر ۱۲۰ می‌باشد

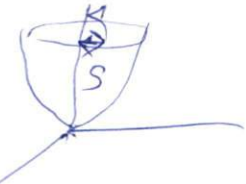
پس $\text{مساحت کل} = 120+120 = 240$ واحد مربع

مثال ۵۹) اگر $\vec F=(xz^2-y)\vec i+(x-z)\vec j+(y^2z-x^2)\vec k$ یک میدان برداری باشد و S بخشی از سطح $z=x^2+y^2$ که زیر صفحه $z=1$ قرار دارد آنگاه انتگرال سطح $I=\iint_S (\text{curl}\vec F\cdot\vec n)\,d\sigma$ را بیابید

حل: طبق قضیه استوکس

$$I=\oint_C (xz^2-y)\,dx+(x-z)\,dy+(y^2z-x^2)\,dz =$$

$$= \oint_{C\ \text{دایره}} (x-y)\,dx+(x-1)\,dy+0 \overset{\text{قضیه گرین}}{=} \iint_R \left(\frac{\partial(x-1)}{\partial x}-\frac{\partial(x-y)}{\partial y}\right)dR \qquad C\begin{cases} z=1 \Rightarrow dz=0 \\ x^2+y^2=1\end{cases}$$



$$=\iint_R 2\,dR = 2(R\ \text{مساحت}) = 2\pi$$

توجه: می‌توان C را به صورت دایره هم پارامتری کرد.

مثال ۶۰) اگر $\vec F$ همان میدان برداری مثال ۵۹ باشد و S سطح محدود به رویه $z=x^2+y^2$ و صفحه $z=1$ باشد آنگاه شار میدان $\vec F$ در امتداد S را حساب کنید

$S=S_1\cup S_2$; $S_1: z=1,\ d\sigma_1=dx\,dy,\ \vec n=\vec k$

$S_2: z=x^2+y^2 \Rightarrow z_x=2x,\ z_y=2y$

حل: طبق قضیه دیورژانس عمل می‌کنیم

$$\text{شار}=\iint_S(\vec F\cdot\vec n)\,d\sigma=\iiint_D \text{div}\vec F\,dD=\iiint_D(z^2+y^2)\,dD \overset{\text{مختصات استوانه‌ای}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^1 (z^2+r^2\sin^2\theta)\,r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1\left[r^3\sin^2\theta\, z+\frac{z^3}{3}r\right]_{r^2}^1 dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1\left[r^3\sin^2\theta+\frac13 r-r^5\sin^2\theta-\frac{r^7}{3}\right]dr\,d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\frac14\sin^2\theta+\frac16-\frac16\sin^2\theta-\frac1{24}\right]d\theta=\int_0^{2\pi}\left(\frac16-\frac1{24}\right)d\theta+\int_0^{2\pi}\frac1{12}\sin^2\theta\,d\theta=\frac{2\pi}{8}+\frac1{12}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos2\theta}{2}\,d\theta$$

$$=\frac14\pi+\frac{2\pi}{24}=\frac{4\pi}{12}=\frac{\pi}{3}$$

روش دوم: به صورت مستقیم

$$\iint_S(\vec F\cdot\vec n)\,d\sigma=\iint_{S_1}(\vec F\cdot\vec n_1)\,d\sigma_1+\iint_{S_2}(\vec F\cdot\vec n_2)\,d\sigma_2=\iint_R(y^2\underset{1}{z}-x^2)\,dR+\iint_R[-Mz_x-Nz_y+P]\,dR$$

$$=\iint_{\text{دایره}}(y^2-x^2)\,dR+\iint_{R\ \text{دایره}}[\cancel{2xy}-2x^2z^2+2yz-\cancel{2yx}+y^2z-x^2]\,dR=\iint_{\text{دایره}}(y^2-x^2)\,dR+$$

$$\iint_R[-2x^2(x^2+y^2)+2y(x^2+y^2)+y^2(x^2+y^2)-x^2]\,dR=$$

$$=\iint_R[y^2-x^2-2x^4-2x^2y^2+2yx^2+2y^3+y^2x^2+y^4-x^2]\,dR$$ در مختصات قطبی حل می‌شود.