* مساحت بین منحنی ها :

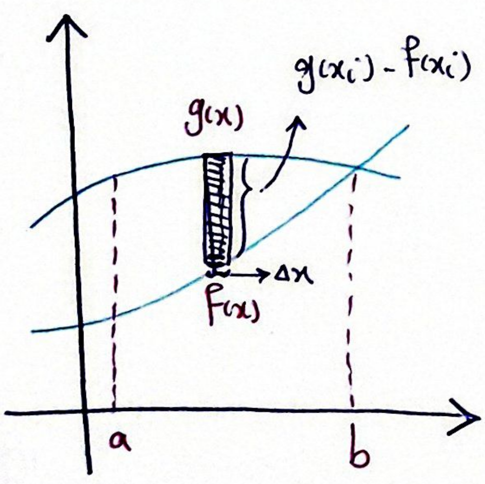
از ابتدا انتگرال گیری را با محاسبه مساحت شروع کردیم . اکنون مساحت سطح بین دو منحنی پیوسته را می خواهیم بدست آوریم

به عنوان مثال فرض کنید می خواهیم مساحت ناحیه محصور بین منحنی های پیوسته $y=f(x)$ و $y=g(x)$ را بدست آوریم که بر بازه $[a,b]$ در شرط $f(x) \leq g(x)$ صدق می کند.

در تئوری می توان تابع $h(x)=g(x)-f(x)$ را در نظر گرفت که برای هر $x\in[a,b]$ ، $h(x)\geq 0$ است و از آن انتگرال گرفت . برای انتگرال گیری همان طور که می دانید می توان با افراز بازه $[a,b]$ به صورت $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$ مساحت ناحیه مورد نظر را به شکل

$$A=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} h(x_i)\,\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(g(x_i)-f(x_i)\right)\Delta x$$

نوشت .



همانطور که در شکل ملاحظه می کنید یک نمونه از افرازبندی را انتخاب نموده و یکی از مستطیل هایی را که با افرازبندی بازه به عرض Δx و به طول $(g(x_i)-f(x_i))$ بدست آمده است را انتخاب نموده و اصطلاحاً به آن المان سطح می گوییم .

بطور شهودی می توان دریافت که این المان در هر بازه بین کدام منحنی ها واقع است و اگر جهت مثبت المان را جهت محورهای مختصات در نظر بگیریم انتگرالده همواره انتهای المان منهای ابتدای المان است و ابتدا و انتهای بازه حدود انتگرال گیری هستند .

حال اگر در بازه $[a,b]$ منحنی‌های $y=f(x)$ و $y=g(x)$ نقطه برخورد داشته باشند ولی یکی از آنها همواره بزرگتر از دیگری نباشد، در ابتدا بایستی نقاط برخورد یا

$$\{x\in[a,b] \mid f(x)=g(x)\}$$

را بیابیم و نقاط برخورد بدست آمده را به ترتیب به صورت زیر مشخص کرده

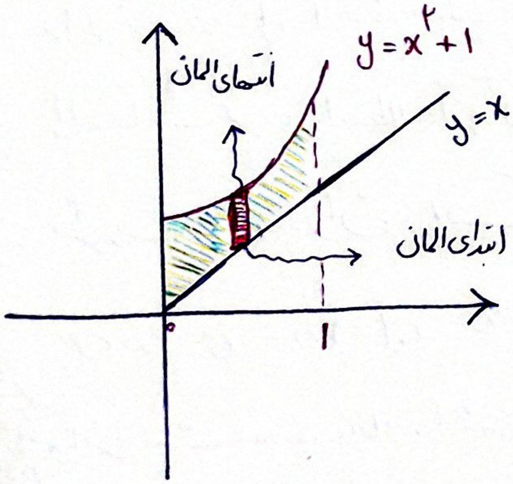
$$a<a_1<\dots<a_k<b$$

آنگاه برای هر i بایستی دریابیم که در بازه $[a_{i-1},a_i]$ کدام منحنی بالاتر قرار می‌گیرد و بر هر بازه مقدار انتگرال را محاسبه کنیم.

بنابراین

> مساحت ناحیه محدود به منحنی‌های $y=f(x)$ و $y=g(x)$ و خط‌های $x=a$ و $x=b$ که در اینجا f و g پیوسته هستند و به ازای هر x در $[a,b]$، $f(x)\le g(x)$ برابر است با
>
> $$A=\int_a^b (g(x)-f(x))\,dx$$

مثال: مساحت ناحیه‌ای را پیدا کنید که از بالا به $y=x^2+1$ محدود است، از پایین به $y=x$ محدود است و از کناره‌ها به $x=0$ و $x=1$ محدود است.



انتهای بازه

$$A=\int_0^1\Big(\underbrace{(x^2+1)}_{\text{انتهای المان}}-\underbrace{x}_{\text{ابتدای المان}}\Big)dx=$$

ابتدای بازه

$$\int_0^1 (x^2-x+1)\,dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\Big]_0^1$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1=\frac{5}{6}$$

مثال: مساحت ناحیه محصور بین سهمی‌های $y=x^2$ و $y=2x-x^2$ را بیابید.

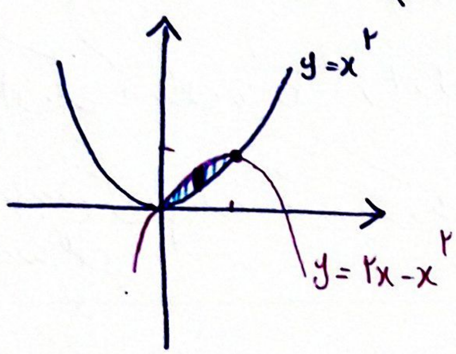
حل: ابتدا نقاط برخورد این سهمی‌ها را با حل کردن همزمان آنها در یک دستگاه بدست می‌آوریم

$$\begin{cases} y=2x-x^2 \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow 2x-x^2=x^2 \Rightarrow 2x=2x^2 \Rightarrow 2x-2x^2=0$$

$$\rightarrow 2x(1-x)=0 \begin{cases} x=0 \xrightarrow{y=x^2} y=0 \Rightarrow (0,0) \\ x=1 \xrightarrow{y=x^2} y=1 \Rightarrow (1,1) \end{cases}$$

نقاط برخورد $(0,0)$ و $(1,1)$ هستند

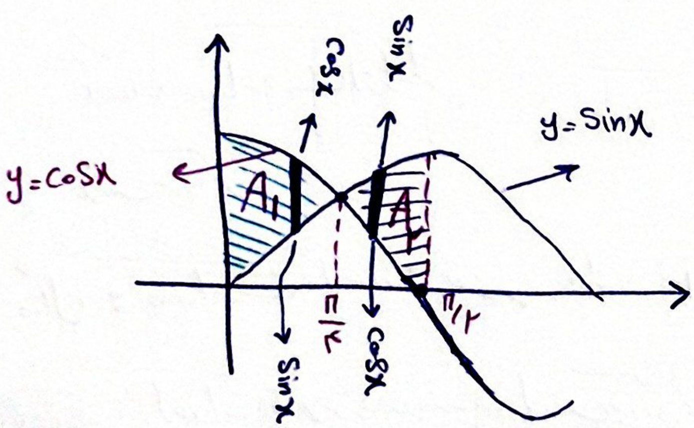
رسم شکل
$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=2x-x^2=-(x^2-2x+1)+1=-(x-1)^2+1 \end{cases}$$



$$A=\int_0^1 \left[(2x-x^2)-x^2\right]dx=\int_0^1 (2x-2x^2)\,dx$$

$$=2\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

مثال: مساحت ناحیه محدود به منحنی‌های $y=\sin x$ و $y=\cos x$ ، $x=0$ و $x=\frac{\pi}{2}$ را بدست آورید.



$$A=\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x-\sin x)\,dx}_{A_1}+\underbrace{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x-\cos x)\,dx}_{A_2}$$

برای تعیین نقاط برخورد در این بازه

$\sin x=\cos x$

$\Rightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{4}}$

$$=\sin x+\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+(-\cos x-\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-0-1\right)+\left(0-1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}-2$$

نکته: مساحت بین منحنی های $y=f(x)$ و $y=g(x)$ و میان $x=a$ و $x=b$ برابر است با

$$A=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

در مثال قبل می توان مساحت ناحیه A را با استفاده از نکته بالا به صورت

$$A=\int_0^{\pi/2} |\cos x-\sin x|\,dx$$

بیان کرد که در این روش نیز باید ابتدا نقاط برخورد دو منحنی را بدست آورد و سپس تعیین کرد که ~~[illegible]~~ قدر مطلق در کدام بازه مثبت و در کدام بازه منفی است که راه حلی مشابه روش حل شده در مثال قبل دارد.

اگر ناحیه ای محدود به منحنی های به معادله های $x=f(y)$ و $x=g(y)$ ، $y=c$ و $y=d$ باشد، که در اینجا f و g تابع های پیوسته هستند که به ازای $c\leq y\leq d$ ، $f(y)\geq g(y)$ آنگاه مساحت از رابطه

$$A=\int_c^d (f(y)-g(y))\,dy$$

بدست می آید.

مثال: مساحت ناحیه محصور به خط $y=x-1$ و سهمی $y^2=2x+6$ را پیدا کنید.

ابتدا نقاط برخورد دو منحنی را بدست می آوریم.

$$\begin{cases} y=x-1 \\ y^2=2x+6 \end{cases} \Rightarrow (x-1)^2=2x+6 \Rightarrow x^2-2x+1-2x-6=0 \Rightarrow$$

$$x^2-4x-5=0 \Rightarrow (x-5)(x+1)=0 \Rightarrow \begin{matrix} x=5 \\ x=-1 \end{matrix}$$

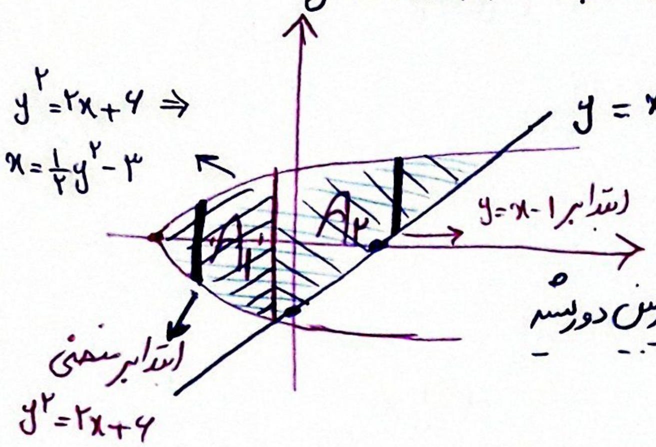
⑤

$x = 5 \xrightarrow{y=x-1} y = 4 \rightsquigarrow (5,4)$

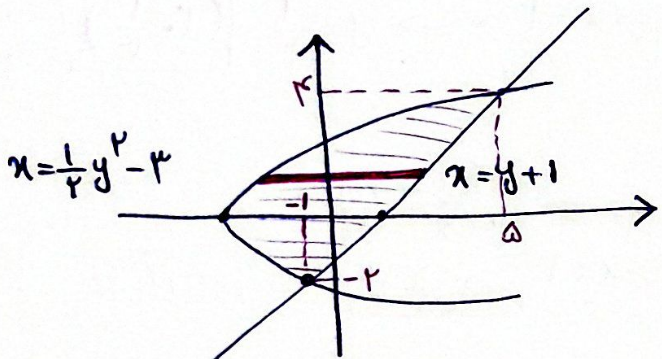
$x = -1 \xrightarrow{y=x-1} y = -2 \rightsquigarrow (-1,-2)$

رسم شکل $\quad y = x - 1 \Rightarrow x = y + 1$

$$y^2 = 2x + 6 \Rightarrow x = \frac{y^2 - 6}{2} = \frac{1}{2}y^2 - 3$$



اگر المان را موازی محور y ها در نظر بگیریم باید ناحیه را به دو قسمت A_1 و A_2 مانند شکل مقابل تقسیم کنیم. زیرا ابتدای المان در ناحیه بین دو بیشه به دو منحنی متفاوت برخورد می کند.



ولی اگر المان موازی محور x ها در نظر گرفته شود شکل مقابل بدست می آید

(توضیحات در فایل صوتی)

$$A = \int_{-2}^{4} (\underbrace{x}_{\text{انتهای المان}} - \underbrace{x}_{\text{ابتدای المان}})\, dy = \int_{-2}^{4} \left((y+1) - \left(\frac{1}{2}y^2 - 3\right)\right) dy$$

$$= \int_{-2}^{4} \left(-\frac{1}{2}y^2 + y + 4\right) dy = -\frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3}\right) + \frac{y^2}{2} + 4y \Big]_{-2}^{4} =$$

$$-\frac{1}{6}(64) + 8 + 16 - \left(\frac{4}{3} + 2 - 8\right) = 18$$

لطفاً تمرین های ۹- ۱۵ - ۱۸ - ۲۱ - ۲۸ - ۳۰ - ۳۲ - ۳۵ - ۳۷ - ۴۸

۴۹ و ۵۰ صفحه ۴۴۱

و تمرین ۲ و ۵ صفحه ۴۷۳ را حل کنید. تمرین $\frac{۱۷}{۴۴۱}$ به عنوان نمونه حل می شود.

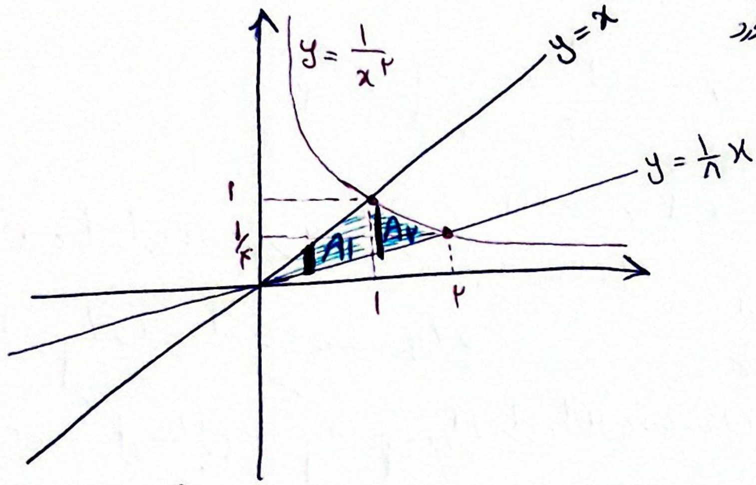
6

ناحیه محصور به منحنی های داده شده را رسم کنید و مساحت ناحیه مورد نظر را بدست آورید.

تمرین ۲۷

صفحه ۴۴۱

$$y = \frac{1}{8}x \ , \ y = x \ , \ y = \frac{1}{x^2}$$



محل برخورد $\begin{cases} y = \frac{1}{8}x \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{8}x = x \Rightarrow x = 0$,

محل برخورد دو منحنی $\begin{cases} y = \frac{1}{8}x \\ y = \frac{1}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{8}x = \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2 \xrightarrow{y = \frac{1}{8}x} y = \frac{1}{4} \quad \boxed{(2, \frac{1}{4})}$

محل برخورد $\begin{cases} y = x \\ y = \frac{1}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x^2} = x \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1 \xrightarrow{y = x} y = 1 \quad \boxed{(1, 1)}$

$$A = A_1 + A_2 = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{8}x\right) dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{8}x\right) dx$$

$$= \frac{7}{16}x^2 \Big|_0^1 + \left(-\frac{1}{x} - \frac{x^2}{16}\right)\Big|_1^2 = \frac{7}{16} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{4}{16} + 1 + \frac{1}{16}\right) = \frac{3}{4}$$

حجم :

اشکال سه بعدی را می توان به سه دسته مختلف تقسیم کرد .

دسته اول : اشکالی سه بعدی که اگر صفحاتی عمود بر ارتفاع آنها با آنها برخورد دهیم سطح مقطع های بوجود آمده همنهشت و هم شکل هستند مانند استوانه که دارای قاعده است و با حرکت قاعده در جهت ارتفاع می توان شکل سه بعدی را به طور کامل تولید کرد . برای بدست آوردن حجم این اجسام می توان مساحت قاعده را در ارتفاع ضرب کرد .

دسته دوم : اشکالی سه بعدی هستند که از برخورد صفحات عمود بر ارتفاعشان با آنها سطح مقطع های بوجود می آیند که تقریبا هم شکل هستند ولی دارای مقیاس های متفاوت می باشند در این اشکال اگر بتوانیم مساحت سطح مقطع را برحسب x فرمول بندی کنیم می توانیم حجم را با استفاده از انتگرال گیری از سطح مقطع بدست آوریم .

دسته سوم : اشکال سه بعدی که دارای سطح مقطع های متفاوت هستند :

تعریف : فرض کنید که جسمی سه بعدی باشد که بین $x=a$ و $x=b$ قرار دارد . اگر مساحت سطح مقطع که در صفحه P_x ، که از x می گذرد و بر محور x عمود است ، $A(x)$ باشد ، که در آن A تابعی پیوسته است ، آن وقت حجم که برابر است با

$$V=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}A(x_i^*)\Delta x=\int_a^b A(x)\,dx$$

از تعریف بالا برای بدست آوردن حجم اشکال دسته دوم استفاده می شود .

تعریف : سطح دوار : از دوران یک منحنی حول خطی در صفحه خودش بوجود می آید . به این خط محور دوران می گوییم

نکته : سطح مقطع سطوح دوار حتما دایره است

بنابراین برای محاسبه حجم سطح دوار می توان از روش های زیر استفاده کرد.

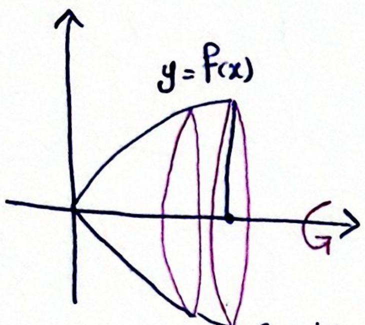
در این حالت ها شعاع همیشه عمود بر محور دوران است

① سطح مقطع قرص باشد : برای بدست آوردن مساحت یک قرص می توانیم از رابطه زیر استفاده کنیم

$$A = \pi(\text{شعاع})^2$$

حال اگر

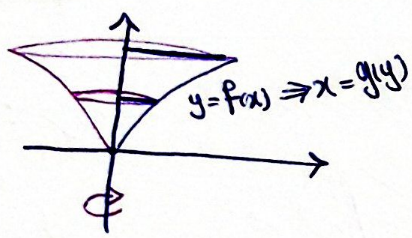
الف - شعاع عمود بر محور x ها باشد و محور x ها محور دوران باشد



$$\text{حجم جسم دوار} = \int_a^b \pi(f(x))^2\,dx$$

$[a,b]$ بر محور x

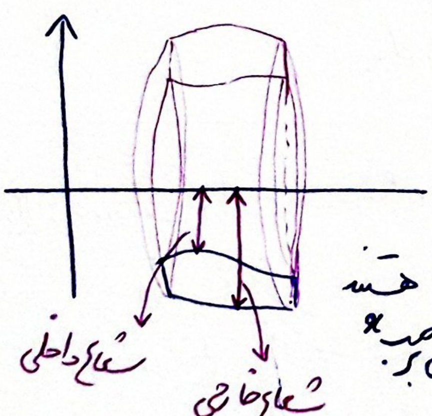
ب - شعاع عمود بر محور y ها باشد و محور y ها محور دوران باشد



$$\text{حجم جسم دوار} = \int_c^d \pi(g(y))^2\,dy$$

$[c,d]$ بر محور y

② سطح مقطع واشر باشد

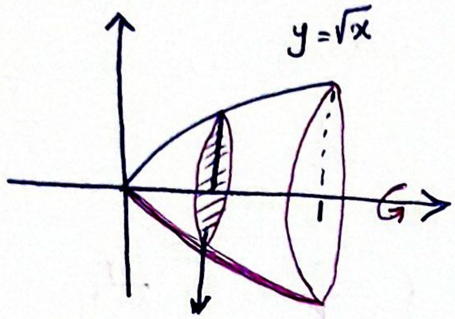


$$A = \int_a^b \pi(\text{شعاع خارجی})^2 - \pi(\text{شعاع داخلی})^2$$

dx اگر محور دوران محور x ها باشد، شعاع داخلی و شعاع خارجی توابعی بر حسب x هستند.

dy اگر محور دوران محور y ها باشد، شعاع داخلی و شعاع خارجی توابعی بر حسب y هستند.

مثال: حجم جسم سه‌بعدی را بدست آورید که از دوران دادن ناحیه زیر منحنی $y=\sqrt{x}$ از ۰ تا ۱ حول محور x بدست می‌آید.



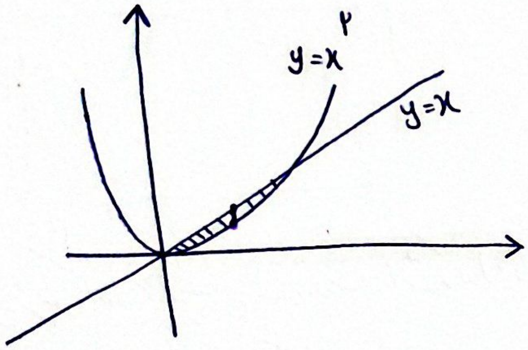
قرصی به شعاع $\sqrt{x}$

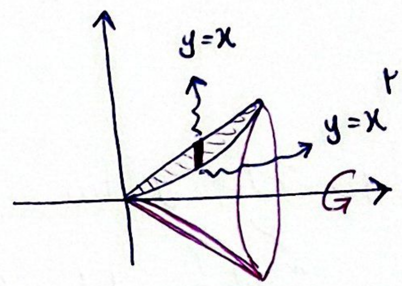
$$\text{مساحت قرص} = \pi(\sqrt{x})^2 = \pi x$$

$$V = \int_0^1 \pi x \, dx = \pi \frac{x^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

V ← حجم

مثال: ناحیه محصور به منحنی‌های $y=x$ و $y=x^2$ را حول محور xها دوران می‌دهیم. حجم جسم سه‌بعدی حاصل را بدست آورید.



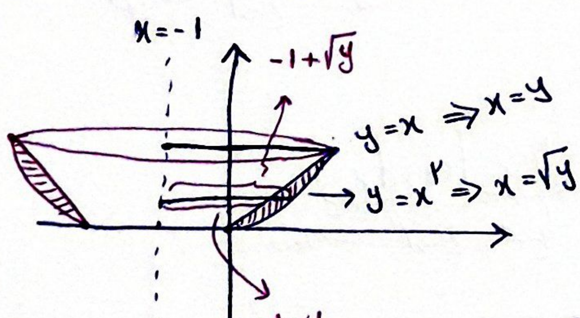


$$A(x) = \underbrace{\pi x^2}_{\text{بالای المان (انتهای المان)}} - \underbrace{\pi(x^2)^2}_{\text{پایین المان (ابتدای المان)}} = \pi(x^2 - x^4)$$

$$V = \int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 \pi(x^2 - x^4)\,dx$$

$$= \pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{15}$$

مثال: حجم جسمی سه‌بعدی را بدست آورید که از دوران دادن ناحیه محصور بین منحنی‌ها در مثال قبل حول خط $x=-1$ بدست آمده است.



شعاع داخلی   شعاع خارجی

$$V = \int_0^1 A(y)\,dy = \pi \int_0^1 \left((1+\sqrt{y})^2 - (1+y)^2\right) dy$$

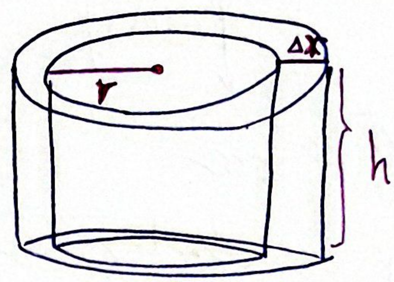
$$= \pi \int_0^1 (2\sqrt{y} - y - y^2)\,dy = \pi\left[\frac{4y^{3/2}}{3} - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

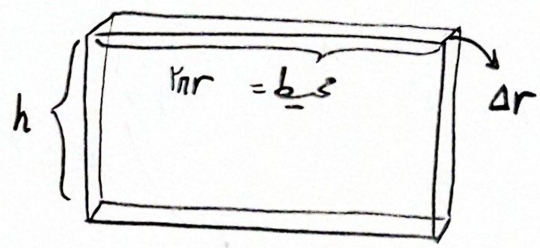
لطفاً تمارین ۵، ۱۱، ۱۶، ۳۳، ۳۶ و ۵۸ صفحه ۴۵۳ و ۸ و ۹ و ۱۴ صفحه ۴۷۳ را حل کنید.

محاسبه حجم به روش پوسته‌های استوانه‌ای

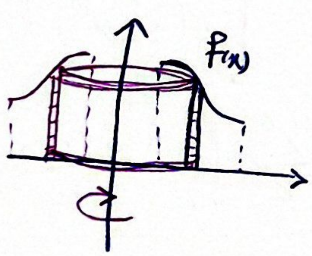
می‌خواهیم حجم یک پوسته استوانه‌ای به شکل مقابل را بدست آوریم که در آن r شعاع، h ارتفاع و Δx ضخامت پوسته است.



$$V = \underset{2\pi r}{\text{محیط}} \times \underset{h}{\text{ارتفاع}} \times \underset{\Delta r}{\text{ضخامت}}$$



حال فرض کنید که جسمی سه بعدی باشد که از دوران ناحیه محدود به $y = f(x)$ حول محور y ها بدست آمده است. می‌توانیم این شکل را به صورت مجموعی از پوسته‌های استوانه‌ای در نظر بگیریم. فرض می‌کنیم که ضخامت این پوسته‌ها Δx باشد که با زیاد کردن تعداد پوسته‌ها می‌خواهیم Δx به صفر میل کند. بنابراین



$$V \simeq \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{2\pi x_i}_{\text{محیط}}\, \underbrace{f(x_i)}_{\text{ارتفاع}}\, \underbrace{\Delta x}_{\text{ضخامت}}$$

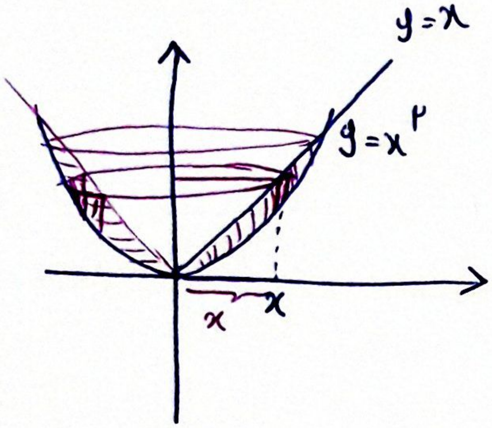
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi x_i f(x_i) \Delta x = \int_a^b \underbrace{2\pi x}_{\text{محیط}}\, \underbrace{f(x)}_{\text{ارتفاع}}\, \underbrace{dx}_{\text{ضخامت}}$$

منظور خلاصه: حجم جسم سه بعدی که از دوران ناحیه زیر منحنی $y = f(x)$ از a تا b، حول محور y بدست آمده برابر است با

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx \qquad 0 \leq a < b$$

مثال:

حجم جسم سه بعدی که از دوران ناحیه بین $y=x$ و $y=x^2$ حول محور y بدست می آید را محاسبه کنید.



$$V=\int_0^1 \underbrace{2\pi x}_{\text{محیط}}\ \underbrace{(x-x^2)}_{\text{ارتفاع}}\,dx = 2\pi\int_0^1 (x^2-x^3)\,dx$$

$$=2\pi\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{\pi}{6}$$

$$\begin{cases} y=x \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2=x \Rightarrow x^2-x=0 \Rightarrow x=0 \text{ و } x=1$$

محل برخورد دو منحنی