حدهای مبهم و قاعده هوپیتال

درحدگیری هفت صورت مبهم وجود دارد که عبارت است از

$\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ و $0\times\infty$ و $\infty-\infty$ و 1^{∞} و 0^{0} و ∞^{0}

برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ روشهای زیادی وجود دارد (مانند هم ارزی ها - تجزیه کردن ....) یکی از این روشها قاعده هوپیتال است.

قاعده هوپیتال: فرض کنید توابع f و g روی بازه بازی مانند I که حاوی a است (بجز احتمالاً در خود a) مشتق پذیر باشند و $g'(x)\neq 0$. همچنین فرض کنید که

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \quad (1)$$

یا

$$(2) \quad \lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \text{ و } \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$$

در این صورت اگر $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجود باشد آنگاه

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

توجه: در قاعده هوپیتال به جای آنکه x لازم است a میل کند می‌تواند x به a^{+} یا a^{-} یا $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند.

رفع ابهام $\infty-\infty$ و $0\times\infty$. این دو مدل حد را می‌توان به $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ به صورت زیر تبدیل کرد و سپس از قاعده هوپیتال کمک گرفت.

در $\infty-\infty$ با استفاده از مخرج مشترک گیری و یا صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج کسر ضرب کردن به $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل می‌شود.

برای رفع ابهام $0\times\infty$ به کمک وارونه کردن یکی از توابع در حاصلضرب و قرار دادن آن در مخرج کسر به $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل می‌کنیم:

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

یا

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

رفع ابهام 1^{∞} و 0^{0} و ∞^{0} به صورت زیر عمل می‌کنیم

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$$

پس باید $\lim_{x\to a} g(x)\ln f(x)$ را محاسبه کنیم که این حد خودش حد مبهم $0\times\infty$ است که در قسمت قبل به $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل می‌شود.

توجه: برای رفع ابهام 1^∞ و 0^0 و ∞^0 می‌توان از تابع $\ln$ کمک گرفت به صورت زیر

$$b=f(x)^{g(x)} \Rightarrow \ln b=\ln\left(f(x)\right)^{g(x)}=g(x)\ln\left(f(x)\right) \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to a}\ln b=\lim_{x\to a} g(x)\ln\left(f(x)\right) \Rightarrow \lim_{x\to a} b = e^{\lim_{x\to a} g(x)\ln\left(f(x)\right)}$$

مثال ۱: مطلوب است محاسبه حدهای زیر:

الف) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3}$

ب) $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$

ج) $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$

د) $\lim_{x\to -\infty} x e^x$

ه) $\lim_{x\to (\frac{\pi}{2})^-}(\sec x-\tan x)$

ز) $\lim_{x\to 0^+}(1+\sin 2x)^{\cot g x}$

س) $\lim_{x\to 0^+} x^x$

ش) $\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

حل:

الف) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3}=\frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3} \overset{Hop}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2} \overset{Hop}{=}$ چون $\frac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x\tan x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3}\sec^2 x \times \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\frac{1}{3}(1)\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\overset{Hop}{=}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x}{1}=\frac{1}{3}\times 1=\frac{1}{3}$$

ب) $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}\overset{Hop}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\frac{1}{1}=1$

ج) $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0\times(-\infty) \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{Hop}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$

$$=\lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

د) $\lim_{x\to -\infty} x e^x=(-\infty)\times 0 \Rightarrow \lim_{x\to -\infty} x e^x=\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{e^{-x}}\overset{Hop}{=}$

$$=\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=\lim_{x\to -\infty}(-e^{x})=0$$

ر) $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}(\sec x-\tan x)=+\infty-(+\infty)=\infty-\infty\Rightarrow$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}(\sec x-\tan x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{1-\sin x}{\cos x}\overset{Hop}{=}\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{-\cos x}{-\sin x}=\frac{0}{1}=0$$

ز) $\lim\limits_{x\to0^+}(1+\sin 2x)^{\cot x}=1^{+\infty}\Rightarrow\lim\limits_{x\to0^+}(1+\sin 2x)^{\cot x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\cot x\,\ln(1+\sin 2x)}=$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(1+\sin 2x)}{\tan x}}\overset{Hop}{=}e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{2\cos 2x}{1+\sin 2x}}{\sec^2 x}}=e^{\frac{\frac{2}{1+0}}{1}}=e^{2}$$

س) $\lim\limits_{x\to0^+}x^{x}=0^0\Rightarrow\lim\limits_{x\to0^+}x^{x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}\overset{Hop}{=}e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=$

$$=e^{-\lim\limits_{x\to0^+}x}=e^{0}=1$$

ش) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=(+\infty)^0\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}\overset{Hop}{=}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}=e^{0}=1$$

نکته: (۱) در استفاده از قاعده هوپیتال باید مطمئن شویم که حد داده شده یکی از هفت صور مبهم است. معمولاً اگر حد به 0^{∞} و ∞^{∞} تبدیل شود مبهم نیست و حل اینگونه حدها هم از فرمول زیر استفاده می‌شود (چون مبهم نیست نیاز به رفع ابهام ندارد)

مثال ۲: حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}\ln x}=e^{(+\infty)(-\infty)}=e^{-\infty}=0$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln x}=e^{(+\infty)(+\infty)}=+\infty$

نکته: (۲) بعضی وقتها استفاده از قاعده هوپیتال به صورت متکرر ما را در یک دور قرار می‌دهد.

مثال ۳: در $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec x}{\tan x}$ قاعده هوپیتال ما را در یک دور قرار می‌دهد (امتحان کنید)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec x}{\tan x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{1}=1$$

نتیجه: حدهای که 0^{∞} و ∞^{∞} مبهم نیستند و جواب این حدها صفر یا ∞ است.

مثال ۴: حدهای زیر را بیابید: ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x)$ الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

حل

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=+\infty-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+x-x^2)}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\left(|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}=\frac{1}{۲}$$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x)=+\infty-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)$

$$=\left(\lim_{x\to+\infty}x\right)\times\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty\times 1=+\infty$$

زیرا $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{Hop}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

تمرین های صفحه ۱۴۹ شماره های ۶۴ و ۶۳ و ۶۲ و ۶۱ و ۵۴ و ۴۷ و ۳۶ و ۹ را حل کنید

۹) $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\frac{\cos x}{1-\sin x}$

۳۶) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$

۴۷) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$

۵۴) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\tan 2x)^x$

۶۱) $\lim\limits_{x\to 0^+}(4x+1)^{\cot g x}$

۶۲) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\tan(\frac{\pi x}{2})}$

۶۳) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

۶۴) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+5}\right)^{2x+1}$

توجه: $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}=e^k}$ ، $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k}$ و $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e}$