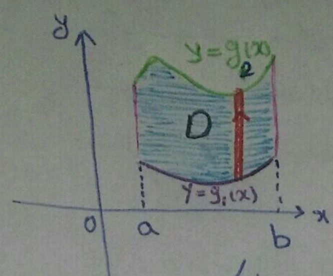
# انتگرال دوگانه روی ناحیه کلی

نکات مهم در انتگرال دوگانه: شناخت تابع ( $z = f(x,y)$ ) ، شناخت ناحیه

توجه: علاوه بر ناحیه مستطیلی که در قضیه فوبینی بیان شد، شناخت ناحیه به دو صورت انجام می‌گیرد



شکل (۱)

## ۱- ناحیه نوع اول (قائم ساده)

$$D = \{(x,y) \mid a \le x \le b \ , \ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

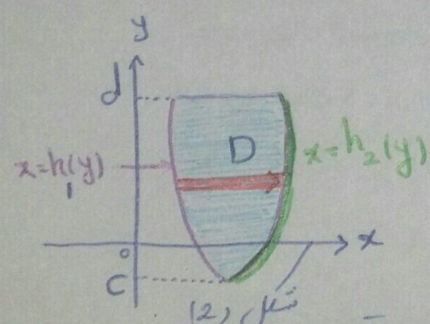
آنگاه انتگرال $\iint_D f(x,y)\, dA$ $\boxed{dA = dy\,dx}$ را می‌توان با توجه به ناحیه $D$ در شکل (۱) به صورت زیر پیدا کرد

اگر $f$ روی ناحیه اول $D$ پیوسته باشد که

$$D = \{(x,y) \mid a \le x \le b \ , \ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

آنگاه

$$\iint_D f(x,y)\, dA = \underbrace{\int_a^b \underbrace{\left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\, dy\right]}_{\text{اولویت ۱}} dx}_{\text{اولویت 2}}$$



شکل (2)

## 2- ناحیه نوع دوم (افقی ساده)

$$D = \{(x,y) \mid h_1(y) \le x \le h_2(y) \ , \ c \le y \le d\}$$

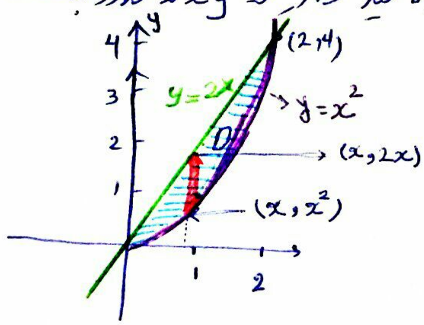
آنگاه انتگرال $\iint_D f(x,y)\, dA$ $\boxed{dA = dx\,dy}$ را می‌توان با توجه به ناحیه $D$ در شکل (2) به صورت زیر پیدا کرد.

اگر $f$ روی ناحیه دوم $D$ پیوسته باشد که $D=\{(x,y)\mid c\le y\le d\ ,\ h_1(y)\le x\le h_2(y)\}$

آنگاه

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\underbrace{\int_c^d\Big[\underbrace{\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx}_{\text{اولویت ۱}}\Big]dy}_{\text{اولویت 2}}$$

**مثال** حجم جسم سه بعدی را که زیر سهمی‌وار $\underbrace{z=x^2+y^2}_{f(x,y)}$ و بالای ناحیه $D$ در صفحه $xy$ که محدود به خط $y=2x$ و سهمی $y=x^2$ است پیدا کنید.




حل: ① ابتدا شکل را رسم می‌کنیم. نیاز به نقاط برخورد داریم

پس دو منحنی را برابر هم قرار می‌دهیم

$$x^2=2x\Rightarrow x^2-2x=0\Rightarrow x(x-2)=0$$
$$\Rightarrow \boxed{x=0\,,\,2}$$

$$D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 2\ ,\ x^2\le y\le 2x\}$$

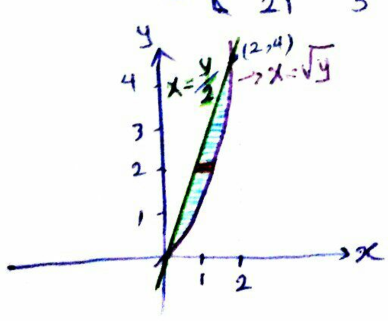
② ناحیه $D$ (نوع اول)

③ شناخت $f(x,y)$ که در اینجا $f(x,y)=x^2+y^2$

$$\text{حجم } V=\iint_D f(x,y)\,dA=\underbrace{\int_0^2\Big[\underbrace{\int_{x^2}^{2x}(x^2+y^2)\,dy}_{\text{اولویت ۱}}\Big]dx}_{\text{اولویت 2}}=\int_0^2\Big(x^2y+\frac{y^3}{3}\Big)_{x^2}^{2x}dx$$

$$=\int_0^2\Big[\underbrace{\Big(x^2(2x)+\frac{(2x)^3}{3}\Big)}_{\frac{14}{3}x^3}-\underbrace{\Big(x^2(x^2)+\frac{(x^2)^3}{3}\Big)}_{x^4-\frac{x^6}{3}}\Big]dx=\int_0^2\Big(-\frac{x^6}{3}-x^4+\frac{14}{3}x^3\Big)dx$$

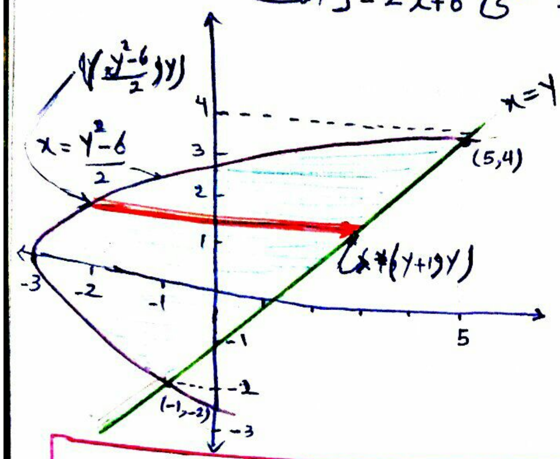
$$=\Big[-\frac{x^7}{21}-\frac{x^5}{5}+\frac{14}{4\times 3}x^4\Big]_0^2=\Big[\Big(-\frac{2^7}{21}-\frac{2^5}{5}+\frac{7}{6}(2)^4\Big)-(0)\Big]=\frac{216}{35}$$




توجه: مثال فوق را می‌توان با استفاده از ناحیه نوع دوم نیز حل کرد

$$D=\{(x,y)\mid 0\le y\le 4\ ,\ \frac{y}{2}\le x\le\sqrt{y}\}$$

**مثال:** $\iint_D xy\,dA$ را که در اینجا $D$ ناحیه محدود به خط $y=x-1$ و سهمی $y^2=2x+6$ است، حساب کنید




حل: ۱- رسم شکل ← یافتن نقاط برخورد دو منحنی

منحنی های $x=y+1$ و

$2x=y^2-6 \Rightarrow x=\frac{y^2-6}{2}$

$\Rightarrow y+1=\frac{y^2-6}{2} \Rightarrow y^2-2y-8=0$

$\Rightarrow (y-4)(y+2)=0 \Rightarrow y=-2,4$

توضیح رسم شکل: برای رسم $y^2=2x+6$ کافی است محل برخورد با محور $x$ و $y$ را یافت.

محل برخورد با محور $x$ ($y=0$) ← $2x+6=0 \to x=-3$

محل برخورد با محور $y$ ($x=0$) ← $y^2=2(0)+6 \Rightarrow y^2=6 \Rightarrow y=\pm\sqrt{6}\simeq 2.45$

و پس چون علامت $y^2$ مثبت است پس جهت دهی رو به سمت راست (جهت مثبت محور $x$) می باشد

برای $y=x-1$ نیز به طور مشابه رفتار می کنیم

۲- ناحیه $D$ (نوع دوم) $D=\{(x,y)\mid -2\le y\le 4,\ \frac{y^2}{2}-3\le x\le y+1\}$

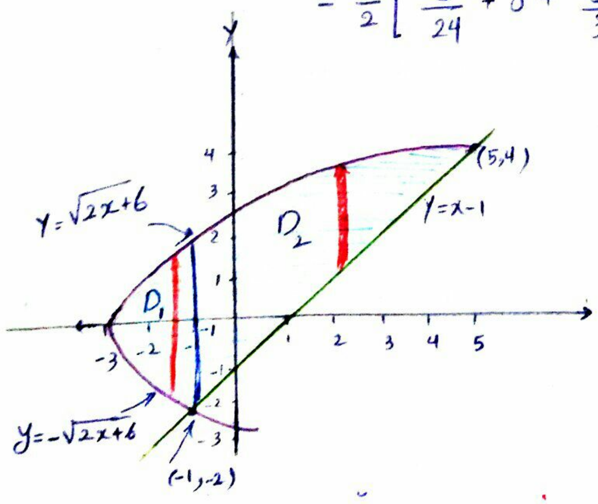
$f(x,y)=xy$

$$\iint_D xy\,dA=\underbrace{\int_{-2}^{4}\underbrace{\left[\int_{\frac{y^2}{2}-3}^{y+1} xy\,dx\right]}_{\text{اولویت ۱}}dy}_{\text{اولویت ۲}}=\int_{-2}^{4}\left[\frac{x^2}{2}y\right]_{x=\frac{y^2}{2}-3}^{x=y+1}dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-2}^{4} y\left((y+1)^2-\left(\frac{y^2}{2}-3\right)^2\right)dy=\frac{1}{2}\int_{-2}^{4}\left(-\frac{y^5}{4}+4y^3+2y^2-8y\right)dy$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{y^6}{24}+y^4+\frac{2y^3}{3}-4y^2\right]_{-2}^{4}=\frac{1}{2}\left[\left(-\frac{4^6}{24}+4^4+2\frac{(4)^3}{3}-4(4)^2\right)-\left(\qquad\right)\right]=36$$

$y=-2$ را در رابطه قرار می دهیم




توجه: اگر ناحیه $D$ را به فرم نوع اول در نظر بگیریم

در آن حالت ناحیه $D$ به دو قسمت $D_1$ و $D_2$ تقسیم می شود

$D_1=\{(x,y)\mid -3\le x\le -1,\ -\sqrt{2x+6}\le y\le\sqrt{2x+6}\}$

$D_2=\{(x,y)\mid -1\le x\le 5,\ -\sqrt{2x+6}\le y\le\sqrt{2x+6}\}$

$\iint_D f(x,y)\,dA=\iint_{D_1}+\iint_{D_2}$ $\Rightarrow$ که نوع اول سخت تر است

## ویژگی انتگرال دوگانه :

$\boxed{1}$ $$\iint_D \big(f(x,y)+g(x,y)\big)\,dA=\iint_D f(x,y)\,dA+\iint_D g(x,y)\,dA$$

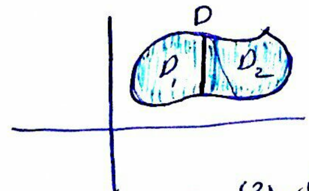
$\boxed{2}$ $$\iint_D c\,f(x,y)\,dA=c\iint_D f(x,y)\,dA \qquad c\in\mathbb{R}$$

$\boxed{3}$ اگر به ازای هر $(x,y)$ در $D$، $f(x,y)\geq g(x,y)$، آنگاه

$$\iint_D f(x,y)\,dA\geq\iint_D g(x,y)\,dA$$

$\boxed{4}$ اگر $D=D_1\cup D_2$ که در اینجا $D_1$ و $D_2$ همپوشانی ندارند مگر احتمالاً در مرزهایشان (شکل 3) آنگاه

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\iint_{D_1} f(x,y)\,dA+\iint_{D_2} f(x,y)\,dA$$



شکل (3)

سوال ؟ ویژگی $\boxed{4}$ مشابه کدام ویژگی در انتگرال یگانه (تکی) است ؟

$\boxed{5}$ اگر $f(x,y)=1$ آنگاه

$$\iint_D 1\,dA=\underbrace{A(D)}_{D\ \text{مساحت}}$$

$\boxed{6}$ اگر به ازای هر $(x,y)$ در $D$، $m\leq f(x,y)\leq M$ آنگاه

$$mA(D)\leq\iint_D f(x,y)\,dA\leq M\,A(D)$$

$m$: مینیمم مطلق f — $M$: f مطلق max

برای درک بیشتر از ویژگی $\boxed{6}$ به مثال 6 صفحه 1257 مراجعه کنید

## تغییر ترتیب در انتگرال های دوگانه (تعویض حدود انتگرال)

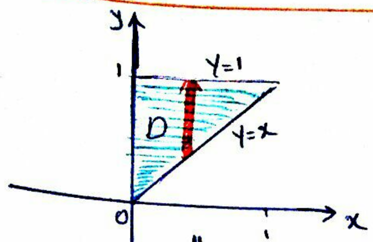
در برخی انتگرال های مکرر با توجه به ناحیه داده شده نمی توان به راحتی انتگرال را محاسبه کرد. در این گونه موارد ترتیب انتگرال گیری را تغییر می دهیم. در حقیقت انتگرال گیری از ناحیه نوع اول به نوع دوم تبدیل می شود یا بالعکس.

**مثال** انتگرال مکرر $\int_0^1\int_x^1 \sin y^2\,dy\,dx$ را حساب کنید

حل: رسم شکل

از حدود انتگرال می دانیم

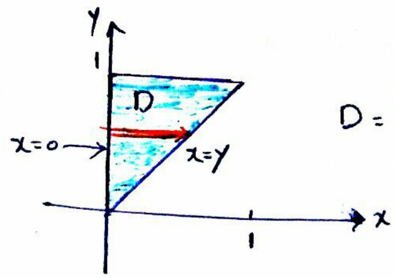
$$D=\{(x,y)\mid x\leq y\leq 1\ ,\ 0\leq x\leq 1\}$$




برای محاسبه انتگرال باید ابتدا انتگرال $\int_x^1 \sin y^2 dy$ را بیابیم که با هیچ روشی از روشهای انتگرال گیری حل نمی شود. (حتی انتگرال $\sin y^2$ از جدول مقدماتی نیز قابل محاسبه نیست). پس ترتیب انتگرال گیری را تغییر می دهیم.

یعنی $\iint dy\,dx \longrightarrow \iint dx\,dy$

پس ناحیه D از نوع اول ⟵ نوع دوم




$$D=\{(x,y)\mid 0\le y\le 1,\ 0\le x\le y\}$$

$$\int_0^1\int_x^1 \sin y^2\,dx\,dy=\underbrace{\int_0^1 \underbrace{\int_0^y \sin y^2\,dx}_{1}\,dy}_{2}$$

$$=\int_0^1\left[x\sin y^2\right]_{x=0}^{x=y}dy=\int_0^1 y\sin y^2\,dy$$

به روش تغییر متغیر (جانشانی)

$y^2=u$

$2y\,dy=du \Rightarrow y\,dy=\frac{du}{2}$

$\int y\sin y^2\,dy=\int \frac{1}{2}\sin u\,du$

$$=\frac{1}{2}\left[-\cos y^2\right]_0^1=\frac{1}{2}\left[-\left(\cos(1)-\cos(0^2)\right)\right]$$

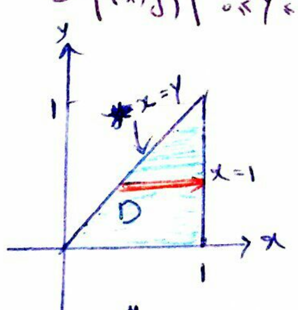
$$=\boxed{\frac{1}{2}(1-\cos 1)}$$

**مثال** انتگرال مکرر $\int_0^4\int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3+1}\,dy\,dx$ بیابید. (حل در صفحه آخر به عنوان تمرین حل شده)

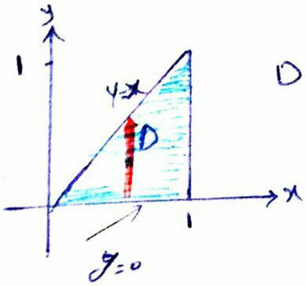
**مثال** انتگرال مکرر $\int_0^1\int_y^1 e^{x^2}\,dx\,dy$ را بیابید.

حل: رسم شکل: می دانیم ناحیه D (نوع دوم)

$$D=\{(x,y)\mid 0\le y\le 1,\ y\le x\le 1\}$$




ابتدا باید $\int_y^1 e^{x^2}dx$ را بدست بیاوریم که به راحتی نه با جدول مقدماتی و نه با روش های گفته شده از قبل، قابل حل نیست. پس ترتیب انتگرال گیری را عوض می کنیم. ناحیه از نوع دوم به نوع اول تبدیل می شود




$$D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x\}$$

$$\int_0^1\int_y^1 e^{x^2}\,dx\,dy=\underbrace{\int_0^1\underbrace{\int_0^x e^{x^2}\,dy}_{1}\,dx}_{2}=\int_0^1\left[y\,e^{x^2}\right]_{y=0}^{y=x}dx$$

$$=\int_0^1 x\,e^{x^2}\,dx$$

به روش تغییر متغیر

$x^2=u$

$2x\,dx=du \Rightarrow x\,dx=\frac{du}{2}$

$\rightarrow \int x e^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int e^u\,du$

$$=\left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1=\frac{1}{2}\left[e^1-\underbrace{e^0}_{1}\right]$$

**توجه:** در حالتی که مجبور به استفاده از تغییر ترتیب انتگرال گیری می شویم شکل تغییر نمی کند، تنها ناحیه انتگرال گیری از نوع اول به دوم یا برعکس تبدیل می شود

**مثال** ناحیه انتگرال گیری را رسم کنید و ترتیب انتگرال گیری را عوض کنید

$$\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$$

حل: برای رسم شکل براساس ناحیه D که از روی حدود انتگرال قابل تشخیص است، عمل می کنیم

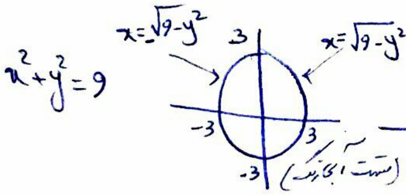
$$D = \{(x,y) \mid 0 \le y \le 3 ,\ -\sqrt{9-y^2} \le x \le \sqrt{9-y^2}\}$$

اکنون رابطه x را برحسب y پیدا می کنیم

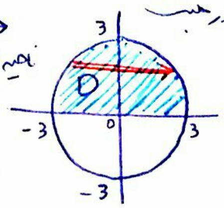
$x=\sqrt{9-y^2}$ و $x=-\sqrt{9-y^2}$ $\Rightarrow$ به توان 2 $x^2=9-y^2 \Rightarrow x^2+y^2=9$

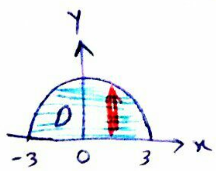
معادله دایره به مرکز (0,0) و شعاع 3

چون مثبت و منفی شامل شده است. پس هم محور مثبت x را شامل می شود هم محور منفی

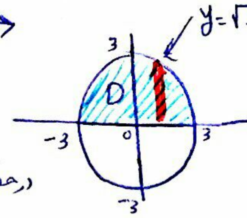



چون $0 \le y \le 3$




در حقیقت ناحیه D نیم دایره است



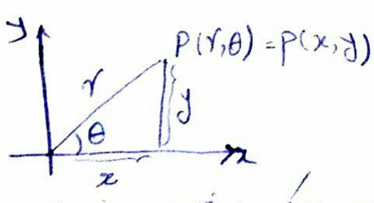

تغییر ترتیب انتگرال گیری

$$D = \{(x,y) \mid -3 \le x \le 3 \ \text{و}\ 0 \le y \le \sqrt{9-x^2}\}$$

$$\rightarrow \int_0^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-3}^{3} \int_0^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$$

## انتگرال دوگانه در مختصات قطبی

معمولاً وقتی معادله مرز ناحیه دایره یا قسمت های از دایره باشد برای محاسبه انتگرال از مختصات قطبی استفاده می کنیم

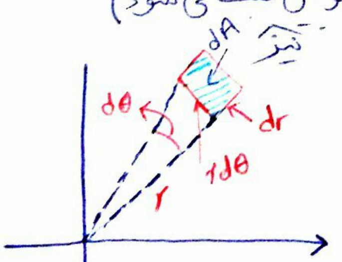



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ r^2 = x^2+y^2 \end{cases}$$

یا $r=\sqrt{x^2+y^2}$

مختصات قطبی $(r,\theta)$ و مختصات قائم $(x,y)$ با رابطه روبرو باهم ارتباط دارند

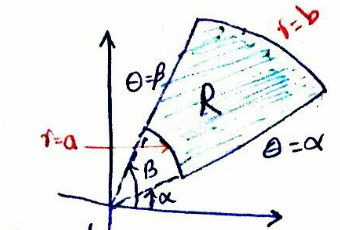
**توجه:** در اینجا $\boxed{dA = r\,dr\,d\theta}$ (بعداً در قسمت تغییر متغیر در انتگرال دوگانه با ژاکوبین ثابت می شود)




مساحت مستطیل آبی رنگ $dA = r\,dr\,d\theta$

## ناحیه های مختصات قطبی

۱- حالت های خاص از مستطیل قطبی




مستطیل قطبی (شکل 4)

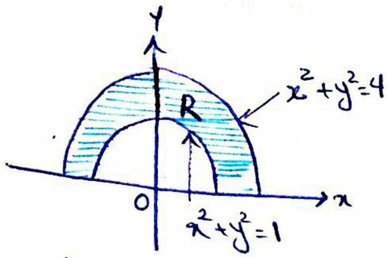
اگر $R=\{(r,\theta)\mid a\le r\le b \;,\; \alpha\le\theta\le\beta\}$

که در اینجا $0\le\beta-\alpha\le 2\pi$ ، آنگاه

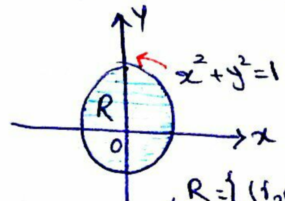
$$\iint_R f(x,y)\,dA=\int_\alpha^\beta\int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

حدود
r و θ عددی باشد.
θ: از جنس زاویه

برای مثال ناحیه های شکل های زیر را در مختصات قطبی بنویسید



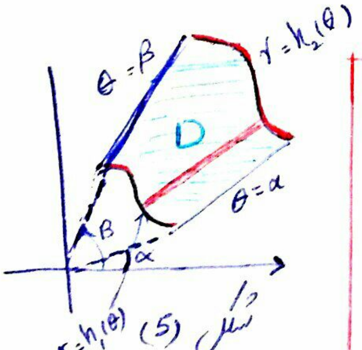

$R=\{(r,\theta)\mid 1\le r\le 2 \;,\; 0\le\theta\le\pi\}$




$R=\{(r,\theta)\mid 0\le r\le 1 \;,\; 0\le\theta\le 2\pi\}$

توجه: به اشتباه $-1\le r\le 1$ نگیرید (با توجه به شکل ناحیه R محدود به $x^2+y^2=1$ است پس $r^2\le 1$)
چون r مثبت است. →
پس $0\le r\le 1$ و مسیر حرکت روی دایره پادساعتگرد است.

## حالت دوم




شکل (5)

اگر f روی ناحیه قطبی به شکل (5)

$D=\{(r,\theta)\mid \alpha\le\theta\le\beta \;,\; h_1(\theta)\le r\le h_2(\theta)\}$

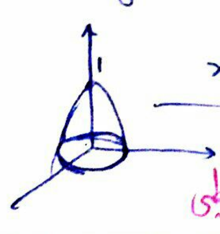
پیوسته باشد، آنگاه

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\int_\alpha^\beta\int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

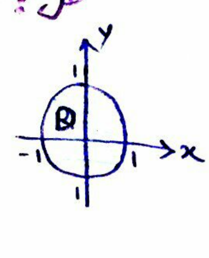
**مثال:** حجم جسم سه بعدی محدود به صفحه $z=0$ و سهمی وار $z=1-x^2-y^2$ را بیابید.

حل: شناخت ناحیه → سهمی بیضوی

$z=1-x^2-y^2 \Rightarrow x^2+y^2=1-z \rightarrow$




تصویر در صفحه xy یعنی $z=0$ → $1-x^2-y^2=0\Rightarrow x^2+y^2=1 \rightarrow$




نکته: وجود عبارت $(x^2+y^2)$ ← مختصات قطبی

$D = \{(r,\theta) \mid 0\le r\le 1 ,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$

$V = \iint_D \underbrace{f(x,y)}_{1-x^2-y^2}\, dA = \underbrace{\int_0^{2\pi}\underbrace{\int_0^1 (1-r^2)\, r\, dr}_{\text{اولویت ۱}}\, d\theta}_{\text{اولویت 2}}$ (*)

۲ـ انتخاب $f(x,y)$

$\boxed{f(x,y) = \underbrace{1-x^2-y^2}_{\text{سهمی}} - \underbrace{0}_{\text{صفحه } z=0}}$

$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r-r^3)\, dr$ : توجه: انتگرال دوگانه (*) تفکیک پذیر است پس می‌توان نوشت

$= [\theta]_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = 2\pi\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right] = \frac{2\pi}{4} = \boxed{\frac{\pi}{2}}$

توجه: اگر مثال داده شده را به روش مختصات قائم (دکارتی) حل کنیم

$V = \iint_D (1-x^2-y^2)\, dA = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1-x^2-y^2)\, dy\, dx$

که به سادگی حل روش مختصات قطبی نیست

**مثال** حجم جسم سه بعدی را که زیر سهمی وار $z=x^2+y^2$ و بالای صفحه $\underbrace{xy}_{z=0}$ و صفحه درون استوانه $x^2+y^2=2x$ قرار دارد پیدا کنید.

حل: ۱ـ شناخت ناحیه (وجود عبارت $x^2+y^2$ در $x^2+y^2=2x$ ← مختصات قطبی

۲ـ شناخت $f(x,y)$ که $f(x,y)=x^2+y^2$

ناحیه قطبی؟ $\underbrace{x^2+y^2}_{r^2} = 2x$

$r^2 = 2r\cos\theta \Rightarrow r^2-2r\cos\theta = 0 \Rightarrow r(r-2\cos\theta)=0$

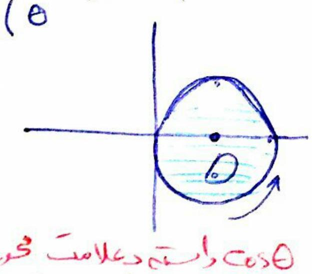
$\Rightarrow r=0$

$r=2\cos\theta$

رسم شکل (بخاطر تشخیص θ) $x^2+y^2=2x \to x^2-2x+y^2=0$

به مربع کامل می‌رسیم $\Rightarrow (x-1)^2-1+y^2=0 \to (x-1)^2+y^2=1$

دایره‌ای به مرکز (1,0) و شعاع ۱




$\to -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

توجه: طریقه دیگر تشخیص θ: چون $0\le r\le 2\cos\theta$ و چون $r\ge 0$ پس $2\cos\theta\ge 0$ پس باید ربع اول و چهارم باشد که $\cos\theta$ مثبت باشند (علامت $\cos\theta$ وابسته به علامت محور x است)

تذکر: بهتر است از رسم شکل برای حدود r و θ استفاده کنیم

$\to D = \{(r,\theta) \mid -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2} ,\ 0\le r\le 2\cos\theta\}$

$V = \iint_D \underbrace{f(x,y)}_{x^2+y^2}\, dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r^2\, r\, dr\, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2\cos\theta} d\theta$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{2^4 \cos^4\theta - 0}{4}\right] d\theta = 4\int_{-\pi/2}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos^4\theta}_{\text{زوج}}\, d\theta$$

توجه: چون $\cos^4\theta$ تابع زوج و ناحیه $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ متقارن است پس

$$= 4 \times 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\, d\theta = 8\int_0^{\pi/2} \underbrace{\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2}_{\frac{1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta}{4}} d\theta$$

اگر f تابعی زوج بر $[-a,a]$ آنگاه

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

اگر f تابعی فرد باشد $\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 0$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\underbrace{1 + 2\cos 2\theta + \frac{1}{2}(1+\cos 4\theta)}_{\frac{3}{2} + 2\cos 2\theta + \frac{1}{2}\cos 4\theta}\right] d\theta$$

$$= 2\left[\frac{3}{2}\theta + 2\times\frac{1}{2}\sin 2\theta + \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{\frac{3\pi}{2}}$$

فرمول توان شکن

$$\cos^2 ax = \frac{1+\cos 2ax}{2}$$

$$\sin^2 ax = \frac{1-\cos 2ax}{2}$$

مثال) انتگرال مکرر زیر را حساب کنید

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dy\, dx$$

حل: وجود جمله $x^2+y^2$ ← مختصات قطبی (بشرطی که ناحیه را بتوان برحسب r به دست آورد)

تعیین ناحیه.

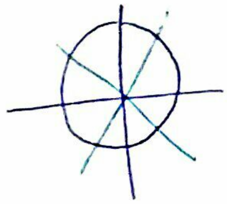
ناحیه دکارتی $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2 \;\; و \;\; 0 \le y \le \underbrace{\sqrt{2x-x^2}}\}$

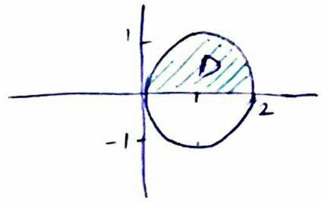
$y = \sqrt{2x-x^2} \Rightarrow y^2 = 2x - x^2$ ← می نویسیم

مربع کامل می نویسیم

$\rightarrow y^2 + x^2 - 2x = 0 \Rightarrow y^2 + (x-1)^2 - 1 = 0 \rightarrow y^2 + (x-1)^2 = 1$

دایره‌ای به مرکز $(1,0)$ و شعاع 1






D فقط نیمه بالایی دایره است چون $y = \sqrt{2x-x^2}$ پس $y \ge 0$ است.

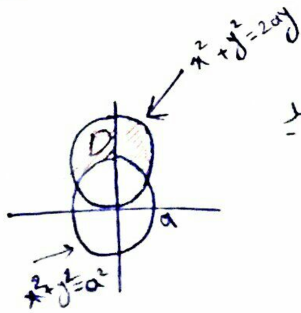
توجه: ناحیه D برای حدود r در مختصات قطبی مانند مثال قبل است

$\rightarrow$ ناحیه قطبی $D = \{(r,\theta) \mid 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le r \le 2\cos\theta\}$

ادامه با دانشجو

سوال! با توجه به شکل زیر انتگرال زیر را بیابید

$$\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}\, dx\, dy$$




تمرینات بعهده دانشجو

ص 1252: 45 ، 46 ، 47-48 ، 50 ، 11

ص 1265: 19 ، 26 ، 30 ، 31

# تمرین های حل شده از بخش 3 و 4 فصل انتگرال چندگانه

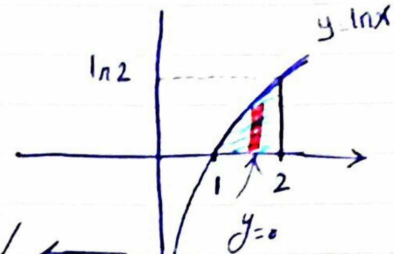
1- ناحیه انتگرال گیری را رسم کنید و سپس ترتیب انتگرال گیری را عوض کنید

ت 43 ص 1258

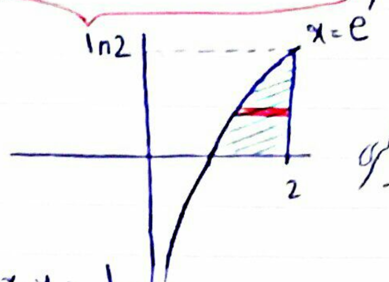
$$\int_1^2\int_0^{\ln x} f(x,y)\,dy\,dx$$

حل:

D: نوع اول




تغییر ترتیب انتگرال گیری




$$\int_0^{\ln 2}\int_{e^y}^{2} f(x,y)\,dx\,dy$$

2- انتگرال مکرر زیر را حل کنید

ت 29 ص 1266

$$\int_{-3}^{3}\int_0^{\sqrt{9-x^2}} \sin(x^2+y^2)\,dy\,dx$$

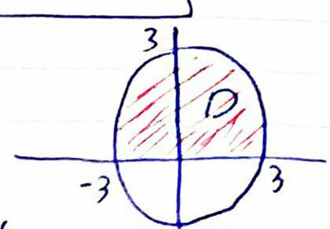
حل: وجود $x^2+y^2$ ⟵ مختصات قطبی

ابتدا ناحیه D را در مختصات دکارتی می نویسیم

$$D=\{(x,y)\mid -3\le x\le 3 \ ,\ 0\le y\le \sqrt{9-x^2}\}$$

از $0\le y\le\sqrt{9-x^2}$ می توان نوشت

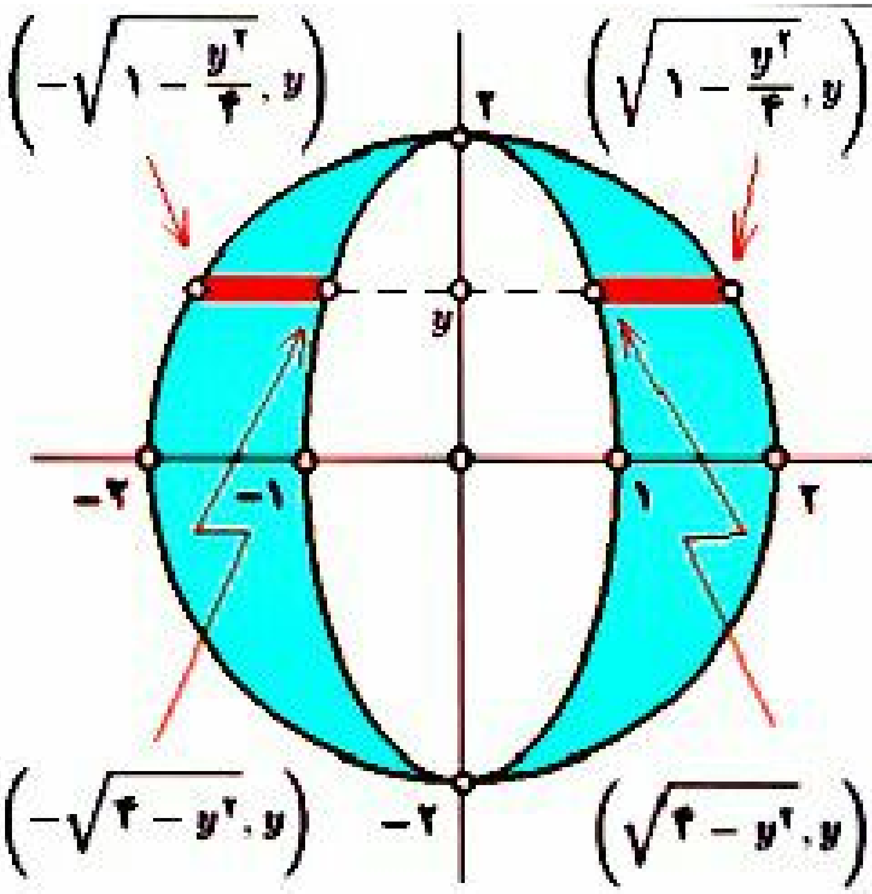
$$y=\sqrt{9-x^2} \Rightarrow y^2=9-x^2 \to y^2+x^2=9$$




D: نیمه بالایی دایره چون y مثبت است.

$$D_{\text{قطبی}}=\{(r,\theta)\mid 0\le\theta\le\pi \ ,\ 0\le r\le 3\}$$

ادامه با داشتیم ⟵




$$D = D_۱ + D_۲$$

$$D_۱ : -۲ \leq y \leq ۲, -\sqrt{۴ - y^۲} \leq x \leq -\sqrt{۱ - y^۲/۴}$$

$$D_۲ : -۲ \leq y \leq ۲, \sqrt{۱ - y^۲/۴} \leq x \leq \sqrt{۴ - y^۲}$$