دستگاه معادلات خطی

تعریف: هر معادله به صورت $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ را یک معادله ی خطی n مجهولی می نامیم.

$$\begin{cases} x_1, x_2, \ldots, x_n : \text{مجهولات معادله} \\ a_1, a_2, \ldots, a_n : \text{ضریب مجهولات} \\ b : \text{مقدار معلوم} \end{cases}$$

* هر n تایی $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ از اعداد حقیقی را که در معادله صدق کند را جواب معادله می نامیم.

تعریف: یک دستگاه معادلات خطی m معادله و n مجهولی، عبارتست از m معادله ی n مجهولی به صورت زیر:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

a_{ij} : ضریب مجهولات

b_i : اعداد معلوم

x_j : مجهولات معادله

$1 \leq i \leq m \ , \ 1 \leq j \leq n$

نکته: دستگاه معادلات خطی m معادله و n مجهولی را می توان به صورت ماتریسی که در زیر آورده شده، بیان کرد:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A_{m\times n}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X_{n\times 1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{B_{m\times 1}} \Rightarrow AX = B$$

ماتریس ضرایب مجهولات (A)

ماتریس مجهولات (X)

ماتریس معلومات (B)

بنابراین دستگاه معادلات خطی m معادله و n مجهولی را می‌توان به صورت $AX=B$ نوشت.

تعریف: اگر B یک ماتریس صفر باشد، بنابراین $AX=0$ را دستگاه معادلات خطی همگن می‌نامند.

مثال: دستگاه روبرو یک دستگاه معادلات خطی همگن است.

$$\begin{cases} 2x+2y+z=0 \\ x-y+z=0 \\ 2x+y+3z=0 \end{cases}$$

حل دستگاه معادلات خطی n معادله و n مجهولی غیرهمگن:

فرض کنید $AX=B$ یک دستگاه معادلات خطی n معادله و n مجهولی باشد. (یعنی $A_{n\times n}$ ، $X_{n\times 1}$ ، $B_{n\times 1}$) اگر A ماتریسی معکوس‌پذیر باشد (باید $\det A \neq 0$ باشد)، آنگاه $X=A^{-1}B$ جواب دستگاه معادلات $AX=B$ است و این جواب، منحصربفرد است.

مثال: دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

۱) $\begin{cases} ۳x - y = ۰ \\ ۲x + ۴y = -۱۴ \end{cases}$

حل:

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix} \quad , \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} ۰ \\ -۱۴ \end{bmatrix}$$

$$A^{-۱} = \frac{۱}{|A|} \operatorname{adj} A = \frac{۱}{۱۴} \begin{bmatrix} \Delta_{۱۱} & \Delta_{۲۱} \\ \Delta_{۱۲} & \Delta_{۲۲} \end{bmatrix} = \frac{۱}{۱۴} \begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۲}{۷} & \frac{۱}{۱۴} \\ -\frac{۱}{۷} & \frac{۳}{۱۴} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = A^{-۱} B = \begin{bmatrix} \frac{۲}{۷} & \frac{۱}{۱۴} \\ -\frac{۱}{۷} & \frac{۳}{۱۴} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ \\ -۱۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ \\ -۳ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \\ y = -۳ \end{cases}$$

۲) $\begin{cases} x - ۲y + ۴z = ۱ \\ -x + y - z = ۲ \\ ۲x + ۳y - z = ۳ \end{cases}$

حل

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۴ \\ -۱ & ۱ & -۱ \\ ۲ & ۳ & -۱ \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

$$\det A = ? \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc} ۱ & -۲ & ۴ \\ -۱ & ۱ & -۱ \\ ۲ & ۳ & -۱ \end{array}\right] \begin{array}{cc} ۱ & -۲ \\ -۱ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{array}$$

$$\Rightarrow \det A = (-۱ + ۴ - ۱۲) - (-۲ - ۳ + ۸) = -۹ - ۳ = -۱۲$$

$$\operatorname{adj}A = \begin{bmatrix} \Delta_{۱۱} & \Delta_{۲۱} & \Delta_{۳۱} \\ \Delta_{۱۲} & \Delta_{۲۲} & \Delta_{۳۲} \\ \Delta_{۱۳} & \Delta_{۲۳} & \Delta_{۳۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۱۰ & -۲ \\ -۳ & -۹ & -۳ \\ -۵ & -۷ & -۱ \end{bmatrix}$$

$\Delta_{۱۱} = (-۱)^{۲}(-۱+۳) = ۲$ $\qquad$ $\Delta_{۲۱} = (-۱)^{۳}(۲-۱۲) = ۱۰$

$\Delta_{۱۲} = (-۱)^{۳}(۱+۲) = -۳$ $\qquad$ $\Delta_{۲۲} = (-۱)^{۴}(-۱-۸) = -۹$

$\Delta_{۱۳} = (-۱)^{۴}(-۳-۲) = -۵$ $\qquad$ $\Delta_{۲۳} = (-۱)^{۵}(۳+۴) = -۷$

$\Delta_{۳۱} = (-۱)^{۴}(۲-۴) = -۲$ $\qquad$ $\Delta_{۳۳} = (-۱)^{۶}(۱-۲) = -۱$

$\Delta_{۳۲} = (-۱)^{۵}(-۱+۴) = -۳$

$$\Rightarrow A^{-۱} = \frac{۱}{|A|}\operatorname{adj}A = \frac{-۱}{۱۲}\begin{bmatrix} ۲ & ۱۰ & -۲ \\ -۳ & -۹ & -۳ \\ -۵ & -۷ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۶} & -\frac{۵}{۶} & \frac{۱}{۶} \\ \frac{۱}{۴} & \frac{۳}{۴} & \frac{۱}{۴} \\ \frac{۵}{۱۲} & \frac{۷}{۱۲} & \frac{۱}{۱۲} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = A^{-۱}B = \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۶} & -\frac{۵}{۶} & \frac{۱}{۶} \\ \frac{۱}{۴} & \frac{۳}{۴} & \frac{۱}{۴} \\ \frac{۵}{۱۲} & \frac{۷}{۱۲} & \frac{۱}{۱۲} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{۸}{۶} \\ \frac{۱۰}{۴} \\ \frac{۲۲}{۱۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{۴}{۳} \\ \frac{۵}{۲} \\ \frac{۱۱}{۶} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{۴}{۳} \\ y = \frac{۵}{۲} \\ z = \frac{۱۱}{۶} \end{cases}$$

دستور کرامر برای حل دستگاه معادلات خطی غیرهمگن n معادله و n مجهولی:

فرض کنید $AX=B$ یک دستگاه معادلات خطی غیرهمگن n معادله و n مجهولی باشد و $\det A \neq 0$. برای استفاده از دستور کرامر، باید ماتریس D_i را محاسبه کرد. D_i ماتریسی است که در آن باید جای ستون iام ماتریس A را با ماتریس B عوض کنیم. در این صورت داریم:

$$x_i = \frac{\det D_i}{\det A}$$

مثال: با استفاده از دستور کرامر، دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x+3y+3z=-1 \\ x+4y+4z=2 \\ x+3y+4z=5 \end{cases}$$

حل

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to x \\ \to y \\ \to z \end{matrix} \qquad B=\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$D_1=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det D_1 = ? \qquad \left[\begin{matrix} -1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 4 \end{matrix}\right] \begin{matrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \det D_1 = (-16+60+18)-(24-12+60) = -10$$

$$D_2=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det D_2 = ? \qquad \left[\begin{matrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \end{matrix}\right] \begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \det D_2 = (8-4+15)-(-4+20+6) = -3$$

$$D_{۳} = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & -۱ \\ ۱ & ۴ & ۲ \\ ۱ & ۳ & ۵ \end{bmatrix} \Rightarrow \det D_{۳} = ? \quad \left[\begin{array}{ccc} ۱ & ۳ & -۱ \\ ۱ & ۴ & ۲ \\ ۱ & ۳ & ۵ \end{array}\right] \begin{array}{cc} ۱ & ۳ \\ ۱ & ۴ \\ ۱ & ۳ \end{array}$$

$$\Rightarrow \det D_{۳} = (۲۰ + ۶ - ۳) - (۱۵ + ۶ - ۴) = ۶$$

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۳ \\ ۱ & ۴ & ۴ \\ ۱ & ۳ & ۴ \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = ? \quad \left[\begin{array}{ccc} ۱ & ۳ & ۳ \\ ۱ & ۴ & ۴ \\ ۱ & ۳ & ۴ \end{array}\right] \begin{array}{cc} ۱ & ۳ \\ ۱ & ۴ \\ ۱ & ۳ \end{array}$$

$$\Rightarrow \det A = (۱۶ + ۱۲ + ۹) - (۱۲ + ۱۲ + ۱۲) = ۱$$

$$\Rightarrow x_{۱} = \frac{\det D_{۱}}{\det A} = \frac{-۱۰}{۱} = -۱۰ \Rightarrow x_{۱} = -۱۰ \Rightarrow \underline{x = -۱۰}$$

$$x_{۲} = \frac{\det D_{۲}}{\det A} = \frac{-۳}{۱} = -۳ \Rightarrow x_{۲} = -۳ \Rightarrow \underline{y = -۳}$$

$$x_{۳} = \frac{\det D_{۳}}{\det A} = \frac{۶}{۱} = ۶ \Rightarrow x_{۳} = ۶ \Rightarrow \underline{z = ۶}$$

حل دستگاه معادلات خطی به روش حذف گوس - جردن :

تعریف : دو دستگاه معادلات خطی را هم ارز می نامیم هرگاه دارای جواب های یکسان باشند.

نکته : با ۴ اصل زیر می توان یک دستگاه معادلات خطی n مجهولی را به یک دستگاه معادلات خطی n مجهولی هم ارز آن تبدیل کرد.

۱- تعویض ترتیب معادلات در یک دستگاه معادلات خطی

۲- ضرب یک عدد نا صفر در یک یا چند معادله ی یک دستگاه معادلات خطی

۳- جمع دو معادله از دستگاه معادلات خطی با هم

۴- ترکیب اصول ۲ و ۳.

روش حل دستگاه های معادلات خطی به روش حذف گوس - جردن :

فرض کنید $AX=B$ یک دستگاه معادلات خطی m معادله و n مجهولی باشد. ماتریس B را به ماتریس A اضافه می کنیم و ماتریس افزوده ی $[A|B]$ را در نظر می گیریم. حال با انجام عملیات سطری مقدماتی، به یک ماتریس $[A'|B']$ می رسیم که یکی از شرایط زیر را داشته باشد:

۱) A' یک ماتریس تحویل شده ی سطری باشد.

۲) A' یک ماتریس تحویل شده ی سطری پلکانی باشد.

۳) A' یک ماتریس بالا مثلثی باشد.

۴) A' یک سطر کامل صفر داشته باشد یا سطری که فقط یک عنصر ناصفر داشته باشد.

حال با توجه به اصول ذکر شده در صفحه ی قبل، دو دستگاه $AX=B$ و $A'X=B'$ هم ارزند و بنابراین جواب های یکسانی دارند. (با این تفاوت که حل دستگاه $A'X=B'$ راحت تر از حل دستگاه $AX=B$ است.)

مثال: دستگاه
$$\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 2x-3y-z=-3 \\ 3x+y+2z=3 \end{cases}$$
را با استفاده از روش حذف گوس-جردن حل کنید.

حل:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

حال ماتریس افزوده را تشکیل می دهیم و روی آن عملیات سطری مقدماتی انجام می دهیم.

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[(-3R_1+R_3\to R_3)]{(-2R_1+R_2\to R_2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -7 & -3 & -11 \\ 0 & -5 & -1 & -9 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(-\frac{1}{7}R_2\to R_2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{11}{7} \\ 0 & -5 & -1 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow[(-2R_2+R_1\to R_1)]{(5R_2+R_3\to R_3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{6}{7} \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{11}{7} \\ 0 & 0 & \frac{8}{7} & -\frac{8}{7} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{7}z = \frac{4}{7} \\ y + \frac{3}{7}z = \frac{11}{7} \\ \frac{8}{7}z = -\frac{8}{7} \end{cases} \qquad \begin{matrix} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

مثال: دستگاه مقابل را به روش حذفی گوس - جردن حل کنید.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + y - z = 4 \\ x - y - 2z = -1 \end{cases}$$

حل

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[(-R_1+R_3 \to R_3)]{(-2R_1+R_2 \to R_2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(-R_2 \to R_2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[(2R_2+R_3 \to R_3)]{(-R_2+R_1 \to R_1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2z = 2 \\ y + 3z = 0 \\ 3z = -3 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x = 0 \\ y = 3 \\ z = -1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \\ z = -1 \end{cases}$$

مثال: دستگاه روبرو را به روش حذفی گوس - جردن حل کنید:

$$\begin{cases} -x+2y+3z=1 \\ 2x+3y-z=1 \\ 3x+5y+2z=8 \end{cases}$$

حل

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \qquad X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{(-R_1\to R_1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 8 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[(-3R_1+R_3\to R_3)]{(-2R_1+R_2\to R_2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & 5 & 3 \\ 0 & 11 & 11 & 11 \end{array}\right] \xrightarrow{(\frac{1}{7}R_2\to R_2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 11 & 11 & 11 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[(-11R_2+R_3\to R_3)]{(2R_2+R_1\to R_1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-11}{7} & \frac{-1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & \frac{22}{7} & \frac{44}{7} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-\frac{11}{7}z=\frac{-1}{7} & x=3 \\ y+\frac{5}{7}z=\frac{3}{7} & y=-1 \\ \frac{22}{7}z=\frac{44}{7} & \longrightarrow z=2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \\ z=2 \end{cases}$$

نکته: فرض کنید $AX=B$ یک دستگاه m معادله و n مجهولی باشد. حالتهای زیر را داریم:

۱) اگر $m=n$، آنگاه

الف) اگر یک یا چند سطر ماتریس $[A'|B']$ صفر باشد، آنگاه دستگاه بی‌نهایت جواب دارد.

مثال:

$$\begin{cases} x+2y-3z=1 \\ 2x+y-z=2 \\ 3x+3y-4z=3 \end{cases}$$

حل

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -4 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[(-3R_1+R_3\to R_3)]{(-2R_1+R_2\to R_2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(-R_2+R_3\to R_3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x+2y-3z=1 \\ -3y+5z=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ تعداد معادلات $= 2 < 3 =$ تعداد مجهولات

$\Rightarrow$ اگر $z=c \Rightarrow y=\frac{5}{3}c \;,\; x=1-\frac{1}{3}c$

عدد حقیقی دلخواه

$\Rightarrow$ چون c عدد حقیقی دلخواهی است $\Rightarrow$ دستگاه بی‌نهایت جواب دارد.

ب) اگر یک سطر A' صفر باشد ولی همان سطر در B' صفر نباشد، آنگاه دستگاه جواب ندارد.

مثال:

$$\begin{cases} x+y+۲z=۵ \\ ۲x+۳y-z=۲ \\ ۴x+۵y+۳z=۷ \end{cases}$$

حل

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & ۲ & ۵ \\ ۲ & ۳ & -۱ & ۲ \\ ۴ & ۵ & ۳ & ۷ \end{array}\right] \xrightarrow[(-۴R_۱+R_۳\to R_۳)]{(-۲R_۱+R_۲\to R_۲)} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & ۲ & ۵ \\ ۰ & ۱ & -۵ & -۸ \\ ۰ & ۱ & -۵ & -۱۳ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(-R_۲+R_۳\to R_۳)} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & ۲ & ۵ \\ ۰ & ۱ & -۵ & -۸ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۵ \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x+y+۲z=۵ \\ y-۵z=-۸ \\ ۰=-۵ \end{cases}$$

که معادله‌ی سوم امکان‌پذیر نیست، بنابراین به تناقض رسیدیم، پس دستگاه جواب ندارد.

ج) اگر تمام سطرهای A' ناصفر باشد، دستگاه جواب منحصر بفرد دارد.

به عنوان مثال، می‌توان به مثال‌هایی که در صفحات ۸، ۹ و ۱۰ جزوه وجود دارد، اشاره کرد.

۲- اگر $m<n$، آنگاه دستگاه بی‌نهایت جواب دارد.

n: تعداد مجهولات، m: تعداد معادلات

مثال:

$$\begin{cases} x+۲y-۳z=۱ \\ -۳y+۵z=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{تعداد معادلات} = m = ۲ \\ \text{تعداد مجهولات} = n = ۳ \end{array} \to m<n$$

→ دستگاه بی‌نهایت جواب دارد.

۳- اگر $m>n$، آنگاه:

الف) اگر در ماتریس $[A'|B']$، تعداد معادلات کمتر از تعداد مجهولات باشد، آنگاه دستگاه بی‌نهایت جواب دارد.

مثال: دستگاه معادلات مقابل را حل کنید.

$$\begin{cases} 3x+y-z=5 \\ 2x+y+z=2 \\ 5x+2y=7 \\ x-2z=3 \end{cases}$$

حل

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[(R_1-R_2-R_4 \to R_4)]{(R_1+R_2-R_3 \to R_3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(R_1+R_2 \to R_2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 5 \\ 5 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{cases} 3x+y-z=5 \\ 5x+2y=7 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ تعداد معادلات $<$ تعداد مجهولات $\Longrightarrow$ دستگاه بی‌نهایت جواب دارد.

$x = c$ (عدد حقیقی دلخواه) $\Longrightarrow y = \frac{7}{2} - \frac{5}{2}c$ $\quad \boxed{5x+2y=7}$

$z = 3x+y-5 = 3c + \frac{7}{2} - \frac{5}{2}a - 5 = \frac{1}{2}c - \frac{3}{2}$ $\quad 3x+y-z=5$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = c \\ y = \frac{7}{2} - \frac{5}{2}c \\ z = \frac{1}{2}c - \frac{3}{2} \end{cases}$$

ب) اگر یکی از معادلات $A'X = B'$ غیر ممکن باشد، دستگاه جواب ندارد.

مثال: دستگاه مقابل را حل کنید.

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \\ -x + 2y + 3z = 2 \\ x + 5y - z = 3 \\ 3x + 8y - 5z = 5 \end{cases}$$

حل

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & -1 & 3 \\ 3 & 8 & -5 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{R_2 + R_3 \to R_3 \\ -2R_3 + R_1 \to R_1 \\ 3R_2 + R_4 \to R_4}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -7 & -2 & -5 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 14 & 4 & 11 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{R_1 + R_3 \to R_3 \\ -2R_3 + R_4 \to R_4}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -7 & -2 & -5 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} -7y - 2z = -5 \\ -x + 2y + 3z = 2 \\ 0 = 0 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

این معادله غیر ممکن است، پس دستگاه جواب ندارد.

ج) اگر تعداد معادلات $A'X = B'$ برابر تعداد مجهولات باشد، آن گاه دستگاه جواب منحصر بفرد دارد.

مثال: دستگاه مقابل را حل کنید.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 3x + y - 2z = 1 \\ 4x - 3y - z = 3 \\ 2x + 4y + 2z = 4 \end{cases}$$

حل

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{-3R_1+R_2 \to R_2 \\ -4R_1+R_3 \to R_3}]{-2R_1+R_4 \to R_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{5}R_2 \to R_2]{-R_2+R_3 \to R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x-2y+z=2 & x=1 \\ y+z=1 & z=1 \\ -6y=0 \longrightarrow y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}$$

حل دستگاه معادلات خطی همگن $AX=0$.

① اگر $AX=0$ یک دستگاه معادلات خطی n معادله و n مجهولی باشد ←

$X=0$ جواب دستگاه $AX=0$ است .

آیا این دستگاه جوابی غیر از صفر دارد؟

- اگر $\det A \neq 0$ ← دستگاه $AX=0$ فقط جواب $X=0$ را دارد و جواب منحصر بفرد است .

- اگر $\det A = 0$ ← دستگاه $AX=0$ دارای بی نهایت جواب است

← دستگاه $AX=0$ دارای جواب غیر صفر است .

۲) اگر $AX=0$ دارای m معادله و n مجهول باشد ⟵

$X=0$ یک جواب دستگاه $AX=0$ است.

سوال: آیا این دستگاه جوابی غیر از صفر دارد؟

- اگر تعداد معادلات کمتر از مجهولات باشد ⟵ دستگاه بی‌نهایت جواب دارد.
⟵ دستگاه $AX=0$ جواب غیرصفر دارد.

- اگر تعداد معادلات بیش از مجهولات باشد ⟵
با عملیات سطری مقدماتی روی A فرض کنید که R ماتریس تحویل شده‌ی سطری پلکانی هم‌ارز سطری A باشد ⟵ دو حالت داریم:

* اگر $R=I$ ⟵ دستگاه $AX=0$ فقط جواب صفر دارد.
* اگر $R\neq I$ ⟵ دستگاه بی‌نهایت جواب دارد
⟵ جواب غیرصفر نیز دارد.

مثال: دستگاه معادلات همگن زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} 4x+3y-z=0 \\ 2x-y+z=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases}$$

حل

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-4R_3+R_1\to R_1]{-2R_3+R_2\to R_2} \begin{bmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 0 & -5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-R_1+R_2\to R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -5y+3z=0 \rightsquigarrow y=\frac{3}{5}z \\ x+2y-z=0 \rightsquigarrow x=z-2y \end{cases}$$

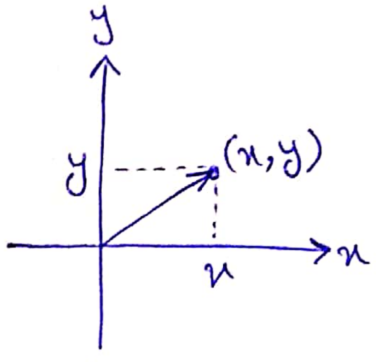
اگر $z=c \xrightarrow{y=\frac{3}{5}z} y=\frac{3}{5}c$

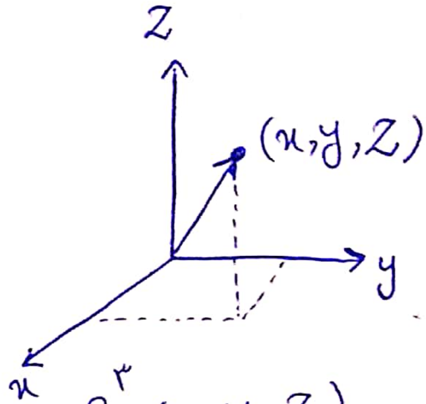
$\xrightarrow[x=z-2y]{} x=c-\frac{6}{5}c=-\frac{1}{5}c$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{5}c \\ y=\frac{3}{5}c \\ z=c \end{cases}$$

استقلال خطی و وابستگی خطی بردارها:

خلاصه‌ای از بردارها:





$\mathbb{R}^2:(x,y)$ $\qquad$ $\mathbb{R}^3:(x,y,Z)$ $\qquad$ .... $\mathbb{R}^n=(x_1,x_2,\dots,x_n)$

تعریف: فرض کنید $\mathbb{R}^n$ مجموعه‌ی تمام بردارها در فضای n بعدی باشد و نیز فرض کنید $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$، n بردار در فضای $\mathbb{R}^n$ باشند. بردار $\beta\in\mathbb{R}^n$ را یک ترکیب خطی از بردارهای $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ می‌نامیم، هرگاه بتوان β را به صورت زیر نوشت:

$$\beta=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\dots+c_n\alpha_n$$

که در آن $c_1,c_2,\dots,c_n$ اعدادی حقیقی هستند.

تعریف: مجموعه‌ی $\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$ را مستقل خطی می‌نامیم اگر تنها جواب معادله‌ی $c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\dots+c_n\alpha_n=\vec{0}$ برابر $c_1=c_2=\dots=c_n=0$ باشد. در غیر این صورت مجموعه را وابسته‌ی خطی نامیم.

* توجه داشته باشید که در اینجا منظور از $\vec{0}$، یک n تایی به صورت زیر است.

$$\vec{0}=(\underbrace{0,0,\dots,0}_{n\text{ تا}})$$

مثال: نشان دهید که $\{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,0)\}$ مستقل خطی است.

حل

$$c_1(1,0,1)+c_2(0,1,1)+c_3(1,1,0)=\vec{0}=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow (c_1,0,c_1)+(0,c_2,c_2)+(c_3,c_3,0)=(0,0,0)\Rightarrow$$

$$(c_1+0+c_3\ ,\ 0+c_2+c_3\ ,\ c_1+c_2+0)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow (c_1+c_3\ ,\ c_2+c_3\ ,\ c_1+c_2)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1+c_3=0 \\ c_2+c_3=0 \\ c_1+c_2=0 \end{cases} \Rightarrow [A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(R_1-R_3\to R_3)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(R_2+R_3\to R_3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{cases} c_1+c_3=0 & c_1=0 \\ c_2+c_3=0 & c_2=0 \\ 2c_3=0 \to & c_3=0 \end{cases} \Rightarrow c_1=c_2=c_3=0 \to$$

مجموعه مستقل خطی است.

مثال: نشان دهید که مجموعه بردارهای $\{(1,0),(0,1),(1,2)\}$ وابسته خطی است.

حل

$$c_1(1,0)+c_2(0,1)+c_3(1,2)=(0,0)\Rightarrow$$

$$(c_1,0)+(0,c_2)+(c_3,2c_3)=(0,0)\Rightarrow$$

$$(c_1+0+c_3\ ,\ 0+c_2+2c_3)=(0,0)\Rightarrow$$

$(c_1 + c_3 \ , \ c_2 + 2c_3) = (0,0) \Rightarrow$

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 0 \\ c_2 + 2c_3 = 0 \end{cases}$$ ← تعداد معادلات $= m = 2$ ، تعداد مجهولات $= n = 3$ ← $m < n$ ← دستگاه بی‌نهایت جواب دارد

← مجموعه‌ی بردارها وابسته‌ی خطی است.

نکته: به عبارت ساده، مجموعه‌ی بردارها زمانی وابسته‌ی خطی هستند که بتوان یک بردار را برحسب بردارهای دیگر نوشت.

نکته: فرض کنید $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ، n بردار در فضای $\mathbb{R}^n$ باشد و فرض کنید A ماتریسی باشد که ستون‌ها (سطرهای) آن بردارهای $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ باشند.

۱) اگر $\det A \neq 0$ ، آنگاه این بردارها مستقل خطی هستند.

۲) اگر $\det A = 0$ ، آنگاه این بردارها وابسته‌ی خطی هستند.

تعریف: فرض کنید A ماتریسی $m \times n$ باشد. حداکثر تعداد سطرهای مستقل خطی (یا تعداد ستون‌های مستقل خطی) ماتریس A را رتبه‌ی ماتریس A می‌نامیم و با $r(A)$ نمایش می‌دهیم.

مثال: رتبه‌ی ماتریس های زیر را بیابید:

$$1)\ A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\\ 3 & 3\end{bmatrix}$$

حل: سطر سوم مستقل خطی نیست. زیرا از جمع سطر اول و دوم بدست می‌آید.

$$C_1(1,2)+C_2(2,1)=(0,0)$$

$$\Rightarrow (C_1,2C_1)+(2C_2,C_2)=(0,0)$$

$$\Rightarrow (C_1+2C_2\ ,\ 2C_1+C_2)=(0,0) \Rightarrow \begin{cases} C_1+2C_2=0 \\ 2C_1+C_2=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{array}\right] \xrightarrow{(-2R_1+R_2\to R_2)} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0\\ 0 & -3 & 0\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{cases} C_1+2C_2=0 & C_1=0 \\ -3C_2=0 \to & C_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=0 \to \text{سطر اول مستقل خطی است.} \\ C_2=0 \to \text{سطر دوم مستقل خطی است.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow r(A)=2$$

$$2)\ B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

حل

$$C_1(1,0,0)+C_2(0,1,0)+C_3(0,0,1)=(0,0,0) \Rightarrow$$

$$(C_1,0,0)+(0,C_2,0)+(0,0,C_3)=(0,0,0) \Rightarrow$$

$$(C_1,C_2,C_3)=(0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} C_1=0 \to \text{سطر اول مستقل خطی است.} \\ C_2=0 \to \text{سطر دوم " "} \\ C_3=0 \to \text{سطر سوم " "} \end{cases}$$

$$\Rightarrow r(A)=3$$

نکته ۱: فرض کنید A ماتریس مربعی $n\times n$ باشد.

۱) اگر $\det A \neq 0$، آنگاه $r(A)=n$.

۲) اگر $\det A = 0$، آنگاه $r(A)<n$ و برای محاسبه‌ی $r(A)$ باید تعداد سطرهای ناصفر ماتریس تحویل شده‌ی سطری R از ماتریس A را بیابیم.

نکته ۲: فرض کنید A ماتریس $m\times n$، R ماتریس تحویل شده‌ی سطری پلکانی هم‌ارز سطری A باشد. در این صورت $r(A)=r(R)$.

(به عبارت ساده‌تر، تعداد سطرهای ناصفر ماتریس R برابر رتبه‌ی ماتریس A است.)

مثال: رتبه‌ی ماتریس‌های زیر را بیابید.

$$1)\ A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\\ 3 & 3\end{bmatrix}$$

حل: ماتریس 3×2 است ← از نکته‌ی ۲ استفاده می‌کنیم.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\\ 3 & 3\end{bmatrix}\xrightarrow[-3R_1+R_3\to R_3]{-2R_1+R_2\to R_2}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -3\\ 0 & -3\end{bmatrix}\xrightarrow[R_2-R_3\to R_3]{-\frac{1}{3}R_2\to R_2}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2R_2+R_1\to R_1}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow \text{تعداد سطرهای ناصفر}=2\longrightarrow r(A)=2$$

۲) $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

حل: ماتریس مربعی است، طبق نکته ی ۱، det را محاسبه می کنیم.

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \det B=(0+6+12)-(4+2+0)=12$$

$$\Rightarrow \det B \neq 0 \longrightarrow r(B)=n=3$$

۳) $C=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

حل: ماتریس مربعی است، طبق نکته ی ۱، det را محاسبه می کنیم.

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \det C=(-2+0+8)-(12+0-6)=0$$

$$\Rightarrow \det C=0 \longrightarrow r(C)<3$$

حال می خواهیم به طور دقیق $r(C)$ را محاسبه کنیم.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[-3R_1+R_3\to R_3]{-2R_1+R_2\to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & -4 \\ 0 & -7 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2-R_3\to R_3]{-\frac{1}{7}R_2\to R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-3R_2+R_1\to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{7} \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(C)=2$$

تذکر: در اینجا قصد داریم تا با استفاده از رتبه‌ی ماتریس، تعداد جواب‌های دستگاه معادلات خطی $AX=B$ را بیابیم.

* فرض کنید $AX=B$ یک دستگاه معادلات خطی m معادله و n مجهولی باشد. سه حالت زیر را داریم:

① اگر $r(A)=r([A|B])<n$ آنگاه دستگاه بی‌نهایت جواب دارد.

مثال: دستگاه روبرو را حل کنید.

$$\begin{cases} x-5y+6z=10 \\ 3x+3y-z=7 \\ 2x+8y-7z=-3 \end{cases}$$

حل

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 8 & -7 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = ? \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc} 1 & -5 & 6 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 8 & -7 \end{array}\right] \begin{array}{cc} 1 & -5 \\ 3 & 3 \\ 2 & 8 \end{array}$$

$$\Rightarrow \det A = (-21+10+144)-(105-8+36)=0$$

$$\Rightarrow \det A = 0 \Rightarrow r(A)<3=n$$

حال به دنبال یافتن جواب دستگاه می‌رویم.

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 6 & 10 \\ 3 & 3 & -1 & 7 \\ 2 & 8 & -7 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[-2R_1+R_3 \to R_3]{-3R_1+R_2 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 6 & 10 \\ 0 & 18 & -19 & -23 \\ 0 & 18 & -19 & -23 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2-R_3 \to R_3]{\frac{1}{18}R_2 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & -\frac{19}{18} & -\frac{23}{18} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{5R_2+R_1 \to R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{13}{8} & \frac{1295}{18} \\ 0 & 1 & -\frac{19}{8} & -\frac{23}{18} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow r[A|B]=2 \to r(A)=r([A|B])=2<3 \to$ دستگاه بی‌نهایت جواب دارد.

۲) اگر $r(A)=r[A|B]=n$ ، آنگاه دستگاه جواب منحصربفرد دارد.

۳) اگر $r(A)<r[A|B]$ ، آنگاه دستگاه جواب ندارد.

مثال: دستگاه روبرو را حل کنید.

$$\begin{cases} x+y=1 \\ 6x-2z=-8 \\ 3y+z=-3 \end{cases}$$

حل

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow [A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{-6R_1+R_2\to R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -2 & -14 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{6}R_2\to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{14}{6} \\ 0 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[-3R_2+R_3\to R_3]{-R_2+R_1\to R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{8}{6} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{14}{6} \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} r(A)=2 \\ r([A|B])=3 \end{matrix} \longrightarrow 2<3 \rightarrow$$ دستگاه جواب ندارد.

نکته: فرض کنید $AX=0$ یک دستگاه معادلات خطی m معادله و n مجهولی همگن باشد. در این صورت داریم:

① اگر $r(A)=n$ ، آنگاه دستگاه فقط جواب $X=0$ دارد.

② اگر $r(A)<n$ ، آنگاه دستگاه بی‌نهایت جواب دارد.