اعداد مختلط

توسعه و گسترش مجموعه اعداد به تدریج صورت گرفته و با توجه به نیاز در محاسبات موجب بکارگیری اعداد منفی را هم (گنگ) گردید. این نیاز در حل معادلات درجه دوم، باعث پیدایش و معرفی اعداد موهومی و مختلط گردید. معادله $x^2+1=0$ فاقد ریشه حقیقی است زیرا $x^2=-1$ (عدد حقیقی منفی جذر ندارد). حال اگر فرض کنید $\sqrt{-1}=i$ و $i^2=-1$ در این صورت معادله $x^2+1=0$ دارای دو ریشه $x=i$ و $x=-i$ خواهد بود و به همین صورت معادله $x^2+4=0$ دارای دو ریشه $x=2i$ و $x=-2i$ است.

تعریف: i را واحد موهومی و اعداد $\pm i$ و $\pm 2i$ را اعداد موهومی می نامیم و بطور کلی اگر b یک عدد حقیقی باشد عدد $\pm bi$ را عدد موهومی می نامیم و مجموعه I را مجموعه اعداد موهومی می باشد

$$I=\{bi \mid b\in\mathbb{R} , i=\sqrt{-1}\}=\{bi \mid b\in\mathbb{R} , i^2=-1\}$$

و هر عدد به صورت $a+ib$ که در آن a و b دو عدد حقیقی اند و $\sqrt{-1}=i$ را عدد حقیقی می نامیم و مجموعه اعداد مختلط را با $\mathbb{C}$ نمایش می دهیم.

$$\mathbb{C}=\{a+ib \mid a,b\in\mathbb{R} , i=\sqrt{-1}\}$$

مثال ۱. معادله زیر را حل کنید. $x^2+x+1=0$

حل: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} \Rightarrow x=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ و $x=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ $\begin{cases} x=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ x=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$

مثال ۲- معادله $x^3+1=0$ را حل کنید

حل: $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)=0 \Rightarrow x+1=0$ و $x^2-x+1=0$

$\Rightarrow x=-1$ و $x=\dfrac{1\pm\sqrt{-3}}{2} \Rightarrow x=-1$ و $x=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ و $x=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$

$x=-1$ و $x=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ و $x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

تبصره: $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ یعنی مجموعه اعداد حقیقی زیر مجموعه اعداد مختلط است زیرا

$$\forall a\in\mathbb{R} \quad a=(a+0i)\in\mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{R}\subset\mathbb{C}$$

تبصره: عدد مختلط $z=a+ib$ از دو قسمت تقسیم شده است قسمت حقیقی و قسمت موهومی قسمت حقیقی را با $a=R(z)$ و قسمت موهومی را با $b=Im(z)$ نمایش می دهیم.

اعمال روی اعداد مختلط

دو عدد مختلط $z=a+ib$ و $w=x+iy$ را مساوی (برابر) نامیم هرگاه $a=x$ و $b=y$ یعنی

قسمت حقیقی z و w با هم برابر باشد و قسمت موهومی z و w با هم برابر باشند.

جمع و تفریق دو عدد مختلط: اگر $z=a+ib$ و $w=x+iy$ آنگاه

$$z+w=(a+x)+(b+y)i \quad \text{و} \quad z-w=(a-b)+(b-y)i$$

ضرب دو عدد مختلط: قبل از بیان ضرب دو عدد مختلط توان‌های عدد i را بررسی می‌کنیم

$$(i)^1=\sqrt{-1} \quad \text{و} \quad (i)^2=-1 \ , \ (i)^3=-i \ , \ (i)^4=1 \ \text{و} \ (i)^5=i \ , \ (i)^6=-1 \ \text{و} \ \ldots$$

بنابراین اگر $n\in\mathbb{Z}$ باشد آنگاه

$$(i)^n=\begin{cases} 1 & n=4k \quad \text{اگر} \\ i & n=4k+1 \quad \text{اگر} \\ -1 & n=4k+2 \quad \text{اگر} \\ -i & n=4k+3 \quad \text{اگر} \end{cases}$$

مثال ۳: مطلوب است محاسبه $(i)^{75}$ و $(i)^{62}$.

حل:

$$75=4\times18+3 \Longrightarrow (i)^{75}=i^3=-i$$

$$62=4\times15+2 \Longrightarrow (i)^{62}=i^2=-1$$

تعریف: ضرب دو عدد مختلط $z=a+ib$ و $w=c+id$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$zw=(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

زیرا ضرب دو عدد مختلط همان ضرب دو عبارت جبری است.

$$(a+ib)(c+id)=ac+iad+ibc+i^2bd=ac+iad+ibc-bd \Rightarrow$$

$$(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)$$

مثال ۴: اگر $z_1=2+i$ و $z_2=-1+3i$ آنگاه

$$z_1+z_2=1+4i \quad \text{و} \quad z_1-z_2=(2+1)+(1-3)i=3-2i$$

$$z_1\cdot z_2=(2+i)(-1+3i)=(-2-3)+(6-1)i=-5+5i$$

مثال ۵: اگر $z=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$ و $w=1-i$ آنگاه

$$z+w=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)+(1-i)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i \quad \text{و} \quad z-w=-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i$$

$$z\cdot w=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)(1-i)=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)i=2+i$$

مثال ۶: اگر $z=1+i$ آنگاه $z\cdot z=z^2$ و z^4 را حساب کنید

حل:

$$z^2=(1+i)(1+i)=(1-1)+(1+1)i=2i \qquad \text{روش اول}$$

$$z^2=(1+i)^2=(1)^2+(i)^2+2i=1-1+2i=2i \qquad \text{روش دوم}$$

$$z^4=(2i)^2=4i^2=-4$$

مزدوج عدد مختلط:

اگر $z=a+ib$ یک عدد مختلط باشد مزدوج آن را با $\bar{z}$ نمایش می‌دهیم $\bar{z}=a-ib$.

مزدوج عدد مختلط همانند مزدوج عبارت $a+b\sqrt{2}$ است یعنی $a-b\sqrt{2}$ بجای $\sqrt{2}$ در اعداد مختلط $\sqrt{-1}=i$ قرار گرفته است.

مثال ۷: مزدوج‌های اعداد $z=2+3i$ و $w=4-i$ و $\alpha=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$ را بدست آورید.

حل: $z=2+3i \Rightarrow \bar{z}=2-3i$ و $w=4-i \Rightarrow \bar{w}=4+i$ و $\bar{\alpha}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$

توجه: اگر $z=a+ib$ آنگاه $z\cdot\bar{z}=(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2$

یعنی حاصل $z\cdot\bar{z}$ یک عدد حقیقی است.

مثال ۸: اگر $z=1+i$ آنگاه $\bar{z}$ و $z\cdot\bar{z}$ و z^3 و $(\bar{z})^3$ و $(\overline{z^3})$ را حساب کنید.

حل: (طبق مثال ۶) $\bar{z}=1-i$ و $z\cdot\bar{z}=(1)^2+(1)^2=2$ و $z^3=z^2\cdot z=(2i)z=-2+2i$

$(\bar{z})^3=-2-2i$ و $(\overline{z^3})=-2-2i \Rightarrow (\bar{z})^3=(\overline{z^3})$

مثال ۹: عبارت x^2+y^2 را می‌توان به صورت زیر تجزیه کرد:

$$x^2+y^2=x^2+(-1)(-y^2)=x^2-(iy)^2=(x-iy)(x+iy)$$

بنابراین

$$x^2+25=(x-5i)(x+5i) \quad \text{و} \quad x^2+4=(x-2i)(x+2i)$$

تقسیم دو عدد مختلط: در تقسیم دو عدد مختلط می‌توان همانند گویا کردن عبارت رادیکالی با فرمول ۲ عمل کرد.

فرض کنید که $z=a+ib$ و $z\neq 0$ باشد در این صورت

$$z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{z\cdot\bar{z}}=\frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z}=\frac{a}{a^2+b^2}-i\frac{b}{a^2+b^2}$$

پس اگر $w=c+id$ باشد آنگاه

$$\frac{z}{w}=\frac{a+ib}{c+id}=\frac{a+ib}{c+id}\cdot\frac{c-id}{c-id}=\frac{(ac+bd)+(-ad+bc)i}{c^2+d^2}$$

$$\Rightarrow \frac{z}{w}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i$$

مثال ۱۰: حاصل عبارت $z=\frac{1+i}{2+i}$ را به صورت جبری بنویسید (ساده کنید)

$$z=\frac{1+i}{2+i}=\frac{1+i}{2+i}\times\frac{2-i}{2-i}=\frac{3+i}{4+1}=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$$

مثال ۱۱: عبارت‌های $z=\frac{3+i}{3-i}$ و $w=\frac{1}{i}$ را ساده کنید.

حل:

$$z=\frac{3+i}{3-i}=\frac{3+i}{3-i}\times\frac{3+i}{3+i}=\frac{(3+i)^2}{9+1}=\frac{8+6i}{10}=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$$

$$w=\frac{1}{i}=\frac{1}{i}\times\frac{-i}{-i}=\frac{-i}{1} \quad \text{یا} \quad w=\frac{1}{i}\times\frac{i}{i}=\frac{i}{-1}=-i$$

قدر مطلق (اندازه عدد مختلط یا طول عدد مختلط) عدد مختلط.

اگر z یک عدد مختلط باشد آنگاه قدر مطلق z را با $|z|$ نمایش می دهیم و اگر $z=a+ib$ آنگاه $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

توجه: $z\cdot\bar{z}=|z|^2 \Longrightarrow |z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{z\cdot\bar{z}}$

مثال ۱۲: اگر $z=3+2i$ آنگاه $|z|=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$.

تبصره: می توان عدد مختلط را به عنوان زوج مرتب در نظر گرفت یعنی $z=a+ib=(a,b)$

در این صورت اگر $z=a+ib=(a,b)$ و $w=c+id=(c,d)$ آنگاه

$$z=(a,b)=(c,d)=w \Longleftrightarrow a=c,\ b=d$$

جمع و تفریق: $z+w=(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$ و $z-w=(a-c,b-d)$

ضرب دو عدد مختلط: $z\cdot w=(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$

بنابراین با در نظر گرفتن $i=(0,1)$ آنگاه داریم $(0,1)^2=(-1,0)=-1$

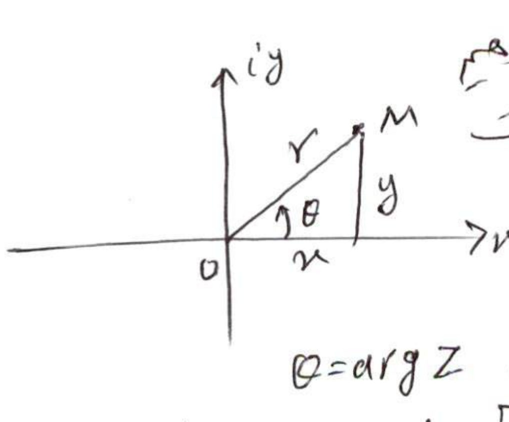
زیرا $1=(1,0)$ و $-1=(-1,0)$ و $0=(0,0)$

بنابراین $a+ib=(a,0)+b(0,1)=(a,b)$

تعبیر هندسی اعداد مختلط و صورت قطبی اعداد مختلط.

در دستگاه مختصات دکارتی x و y محور x ها را محور حقیقی و محور y را محور موهومی در نظر می گیریم در این صورت هر نقطه روی این صفحه نمایش یک عدد مختلط $x+iy$ می باشد و برعکس هر عدد مختلط $x+iy$ نمایش یک نقطه (x,y) در صفحه است. این صفحه را صفحه اعداد مختلط در نظر می گیریم.

فرض کنید که نقطه M در صفحه اعداد مختلط باشد و نمایش عدد مختلط $z=x+iy$ باشد.



زاویه ای که OM با جهت مثبت محور x ها را با θ نمایش می دهیم و با تقریب $2k\pi$ مشخص می شود که در آن $k\in Z$ دلخواه است θ را آرگومان عدد مختلط (argument) می نامیم آرگومان را شناسه یا آوند عدد مختلط نیز نامیده می شود $\theta=\arg z$

$z=x+iy \Rightarrow r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ و $\tan\theta=\frac{y}{x}$ و $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$

$$\Longrightarrow z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

توجه: برای محاسبه θ باید به علامت x و y توجه کرد یعنی در نظر گرفته شود که Z در کدام ناحیه قرار دارد تا مقدار صحیح θ به دست آید.

معادله $Z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ را صورت قطبی یا صورت مثلثاتی مختلط Z می‌نامیم و آن را به صورت $Z=r\,\mathrm{cis}\,\theta$ می‌نویسیم که در آن حرف c علامت کسینوس و i واحد موهومی و s علامت سینوس است.

مثال ۱۳: ثابت کنید که $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ (این فرمول به فرمول اویلر معروف است)

اثبات: می‌دانیم که

$$\cos x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!} \quad \text{و} \quad \sin x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{و} \quad e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$e^{i\theta}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(i\theta)^n}{n!}=\frac{(i\theta)^0}{0!}+\frac{(i\theta)^1}{1!}+\frac{(i\theta)^2}{2!}+\frac{(i\theta)^3}{3!}+\cdots\frac{(i\theta)^n}{n!}+\cdots$$

$$=\left(1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\frac{\theta^6}{6!}+\cdots\right)+i\left(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\frac{\theta^7}{7!}+\cdots\right)$$

$$\Rightarrow e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

زیرا

$$\cos\theta=1-\frac{\theta^2}{2}+\frac{\theta^4}{4!}-\frac{\theta^6}{6!}+\cdots \quad \text{و} \quad \sin\theta=\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\frac{\theta^7}{7!}+\cdots$$

توجه: با کمک مثال ۱۳ می‌توان $Z=x+iy$ را به صورت $Z=|Z|e^{i\theta}$ نمایش داد زیرا

$$Z=x+iy=|Z|(\cos\theta+i\sin\theta)=|Z|e^{i\theta}$$

همچنین:

$$(e^{i\theta})^n=(\cos\theta+i\sin\theta)^n=(e^{i\theta})^n=e^{in\theta}=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

پس $e^{in\theta}=(e^{i\theta})^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$.

مثال ۱۴: صورت قطبی اعداد مختلط $Z=-4$ و $Z=3i$ و $Z=2+2i$ و $Z=-i$ و $Z=1-i$ و $Z=-3-3i$ و $Z=-3+3i$ را بدست آورید.

حل:

$$Z=-4=-4+0i\Rightarrow x=-4,\ y=0\Rightarrow r=4,\ \tan\theta=\frac{0}{-4}=0\Rightarrow\theta=\pi$$

$$\Rightarrow Z==-4=4(\cos\pi+i\sin\pi)=4e^{i\pi}$$

$Z = 3i \Rightarrow x=0,\ y=3 \Rightarrow r=3,\ \tan\theta = \frac{3}{0} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$Z = 3i = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 3e^{\frac{\pi}{2}i}$

$Z = 2+2i \Rightarrow x=y=2,\ r=\sqrt{4}=2$ و $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$

$Z = 2+2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2e^{\frac{\pi}{4}i}$

$Z=-1 \Rightarrow x=-1,\ y=0,\ r=1,\ \theta = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow Z=-1 = \left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = e^{\frac{3\pi}{2}i}$

$Z = 1-i \Rightarrow x=1,\ y=-1 \Rightarrow r=\sqrt{2},\ \theta = \tan^{-1}(-1) = \frac{7\pi}{4}$ یا $\cancel{\theta =} -\frac{\pi}{4}$

$Z = 1-i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$

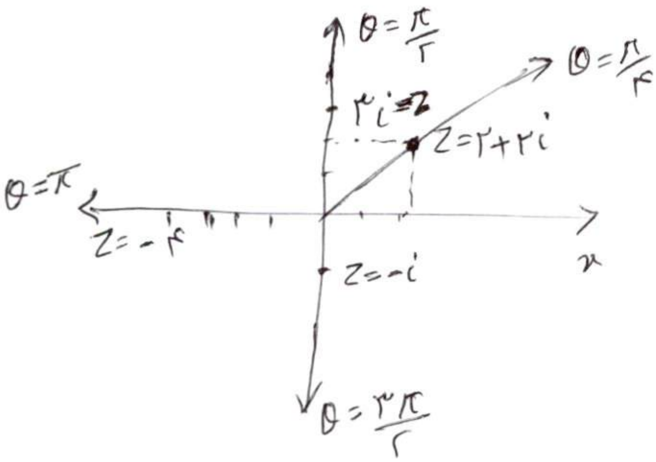
$Z = -3-3i \Rightarrow x=y=-3 \Rightarrow r = 3\sqrt{2}$ و $\theta = \tan^{-1}(-1) = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow$

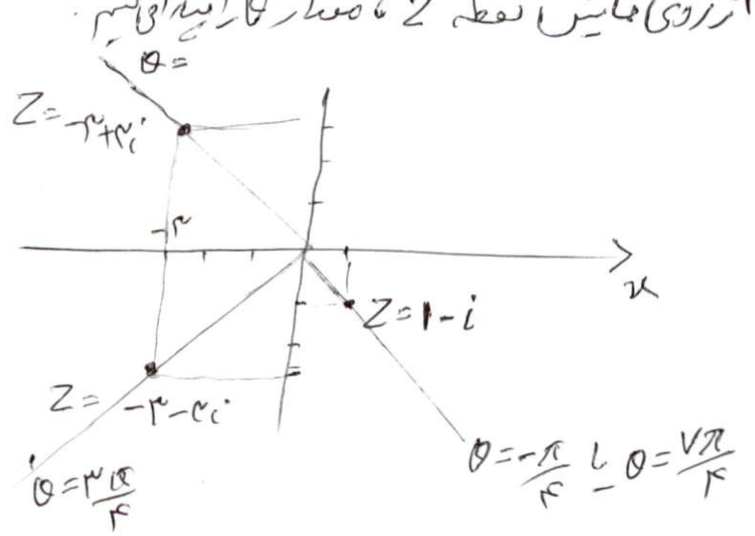
$Z = -3-3i = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i}$

$Z = -3+3i \Rightarrow x=-3,\ y=3 \Rightarrow r=3\sqrt{2}$ و $\theta = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow$

$Z = -3+3i = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$

توجه: برای تعیین θ، نمایش نقطه Z را در صفحه مختلط پیدا می‌کنیم. در مثال بالا (مثال ۱۴) از روی نمایش نقطه Z مقدار θ را پیدا می‌کنیم.





نقطه Z روی هر نیم‌خطی قرار داشته باشد آن نیم‌خط همان θ برای نقطه Z است.

حاصل ضرب دو عدد مختلط با کمک نمایش قطبی و توانهای اعداد مختلط:

اگر $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_1 e^{i\theta_1}$ و $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_2 e^{i\theta_2}$ آنگاه

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} = r_1 r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$$

بنابراین

$$(1)\quad |z_1 z_2| = |z_1|\cdot|z_2| = r_1 \cdot r_2$$

$$(2)\quad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \pm 2k\pi$$

نتیجه: اگر $z = r[\cos\theta + i\sin\theta]$ آنگاه چون $z = re^{i\theta}$ پس $z^n = r^n e^{in\theta} = r^n[\cos n\theta + i\sin n\theta]$

مثال ۱۵: مطلوب است محاسبه

$$z = (1+i)^{12}(2+2\sqrt{3}i)$$

حل:

$$z_1 = 1+i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i} = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow (1+i)^{12} = (\sqrt{2})^{12} e^{\frac{12\pi}{4}i}$$

$$\Rightarrow (1+i)^{12} = 2^6 e^{3\pi i} = 64[\cos 3\pi + i\sin 3\pi] = -64$$

$$z_2 = 2+2\sqrt{3}i \Rightarrow |z_2| = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$$ و $\tan\theta = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ پس $\theta = \frac{\pi}{3}$

$$\Rightarrow z_2 = 4e^{\frac{\pi}{3}i} \Rightarrow z = (1+i)^{12}(2+2\sqrt{3}i) = (-64)\times 4e^{\frac{\pi}{3}i} = -256\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right]$$

$$\Rightarrow z = -256\left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right] = -128[1+\sqrt{3}i]$$

مثال ۱۶: حاصل

$$w = (-1+i)^8(1+i)^{16}(\sqrt{3}+i)^6$$

$-1+i = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$ و $1+i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ و $\sqrt{3}+i = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$: $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow w = (-1+i)^8(1+i)^{16}(\sqrt{3}+i)^6 = (\sqrt{2})^8(\sqrt{2})^{16}(2)^6 e^{\left(\frac{24\pi}{4}i + \frac{16\pi}{4}i + \frac{6\pi}{6}i\right)} \Rightarrow$$

$$w = 2^{18}e^{11\pi i} = 2^{18}[\cos(10\pi+\pi) + i\underbrace{\sin(10\pi+\pi)}_{0}] = 2^{18}[\cos\pi + i\underbrace{\sin\pi}_{0}] = -2^{18}$$

صورت قطبی تقسیم دو عدد مختلط:

اگر $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ و $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ آنگاه

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

پس

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right]$$

نتیجه: اگر $z = re^{i\theta}$ آنگاه

$$\left(\frac{1}{z}\right)^n = z^{(-n)} = (r)^{-n}e^{-in\theta} = \frac{1}{r^n}[\cos n\theta - i\sin n\theta]$$

مثال ۱۷: حاصل عبارت $Z=\left(\frac{-1+i}{1+i}\right)^{10}$ را بدست آورید.

حل: روش اول

$$-1+i=\sqrt{2}\,e^{\frac{3\pi}{4}i} \quad ,\quad 1+i=\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i} \Rightarrow \frac{-1+i}{1+i}=e^{\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)i}=e^{\frac{\pi}{2}i}=i$$

$$\Rightarrow Z=\left(\frac{-1+i}{1+i}\right)^{10}=(i)^{10}=(i)^{2\times4+2}=(i)^{2}=-1$$

روش دوم:

$$\frac{-1+i}{1+i}=\frac{-1+i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}=\frac{(-1+1)+(2i)}{2}=i \Rightarrow Z=\left(\frac{-1+i}{1+i}\right)^{10}=(i)^{10}=(i)^{2}=-1$$

مثال ۱۸: حاصل عبارت

$$Z=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{120}$$

حل: روش اول

$$1+i\sqrt{3}=2\,e^{\frac{\pi}{3}i} \quad ,\quad 1-i\sqrt{3}=2\,e^{\frac{5\pi}{3}i} \quad ,\quad \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}=e^{-\frac{4\pi}{3}i}$$

$$Z=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{120}=e^{-120\left(\frac{4\pi}{3}i\right)}=e^{-160\pi i}=\cos(-160\pi)+i\sin(-160\pi)=\cos 160\pi=1$$

روش دوم

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}=\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\times\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}=\frac{(1-3)+2\sqrt{3}i}{1+3}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i=e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

$$\Rightarrow Z=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{120}=e^{120\left(\frac{2\pi}{3}i\right)}=e^{80\pi i}=\cos(80\pi)+i\sin(80\pi)=\cos(80\pi)=1$$

مثال ۱۹: حاصل عبارت $Z=\frac{4}{\cos\alpha+i\sin\alpha+1}$ را بیابید.

حل

$$1+\cos\alpha+i\sin\alpha=(1+\cos\alpha)+i\sin\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2i\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\cos\frac{\alpha}{2}\left[\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right]$$

زیرا $1+\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}$ و $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$.

$$Z=\frac{4}{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}=\frac{4}{2\cos\frac{\alpha}{2}\left[\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right]}=2\sec\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\frac{\alpha}{2}-i\sin\frac{\alpha}{2}\right]$$

مثال ۲۰: نشان دهید که الف) $\cos\theta=\cosh(i\theta)$ و $\sinh(i\theta)=i\sin\theta$

ب) $\cos(i\theta)=\cosh\theta$ و $\sin(i\theta)=i\sinh\theta$.

حل: الف و ب)

$$\begin{cases} e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \\ e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\cosh(i\theta) \\ \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}=\frac{1}{i}\sinh(i\theta) \Rightarrow \sinh(i\theta)=i\sin\theta \end{cases}$$

$$\cos(i\theta)=\frac{e^{-\theta}+e^{\theta}}{2}=\cosh\theta$$

و $$\sin(i\theta)=\frac{e^{-\theta}-e^{\theta}}{2i}=-\frac{1}{i}\sinh(i\theta)=i\sinh\theta$$

ریشه های n ام واحد اعداد مختلط: (یعنی $\sqrt[n]{1}$).

حل معادله های $x^2=1$ ، $x^3=1$ ، ... ، $x^n=1$ به یافتن ریشه های n ام واحد تبدیل می شود یعنی $\sqrt{1}$ و $\sqrt[3]{1}$ و $\sqrt[4]{1}$ و ... و $\sqrt[n]{1}$.

برای نمونه ریشه های دوم واحد عبارتند از ۱ و ۱-

$$x^2=1 \Rightarrow x=1 , x=-1 \Rightarrow$$

$$x^3=1 \Rightarrow (x-1)(x^2+x+1)=0 \Rightarrow x=1 , x=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

یعنی ریشه های سوم واحد عبارت است از $x=1$ و $x=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ و $x=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

به همین صورت معادله $x^4=1$ دارای ریشه ای ۱ و ۱- و i و i- است یعنی ریشه های چهارم واحد عبارتند از ۱ و ۱- و i و i-.

زیرا ریشه های دوم واحد یعنی $\sqrt[2]{1}$ و ریشه های سوم واحد یعنی $\sqrt[3]{1}$ و ریشه های چهارم واحد یعنی $\sqrt[4]{1}$

بنابراین ریشه های n ام واحد یعنی $\sqrt[n]{1}$ عبارت است از ریشه های معادله $Z^n=1$:

فرض کنید که $Z=re^{i\theta}$ ریشه معادله $Z^n=1$ باشد پس

$$1=Z^n=r^n e^{in\theta}$$

$$\Rightarrow r=1 , \; e^{in\theta}=1 \Rightarrow \cos n\theta+i\sin n\theta=1 \Rightarrow \begin{cases}\cos n\theta=1=\cos(0)\\ \sin n\theta=0\end{cases} \Rightarrow n\theta=2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \theta=\frac{2k\pi}{n} \Rightarrow Z=e^{i\theta}=e^{\frac{2k\pi}{n}i} \quad k\in\mathbb{Z}$$

چون بعضی از این جواب ها تکراری هستند پس ریشه های n ام واحد عبارتند از

$$\boxed{Z_k=e^{\frac{2k\pi}{n}i}=\left[\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right] \qquad k=0,1,2,\dots,(n-1)} \quad (*)$$

مثال ۲۱: ریشه های پنجم واحد را بدست آورید (معادله $Z^5=1$ را حل کنید).

حل: طبق فرمول * داریم:

$$Z_k=e^{\frac{2k\pi}{5}i}=\cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{5}\right) \quad k=0,1,2,3,4$$

$$k=0 \Rightarrow Z_0=e^{0i}=1$$

$$k=1 \Rightarrow Z_1=e^{\frac{2\pi}{5}i}=\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$k=2 \Rightarrow Z_2=e^{\frac{4\pi}{5}i}=\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right) \Rightarrow$$

$$Z_2=-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right).$$

$$k=3 \Rightarrow Z_3=e^{\frac{6\pi}{5}i}=\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{5}\right) \Rightarrow$$

$$Z_3=-\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5}. \qquad k=4 \Rightarrow Z_4=e^{\frac{8\pi}{5}i}=\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow z_4 = \cos(2\pi - \frac{2\pi}{5}) + i\sin(2\pi - \frac{2\pi}{5}) = \cos\frac{2\pi}{5} - i\sin(\frac{2\pi}{5})$

بدیهی است که $z_3 = \overline{z_2}$ و $z_4 = \overline{z_1}$.

نتیجه: اگر z جواب معادله $z^n = 1$ باشد آنگاه $\bar{z}$ هم جواب معادله $z^n = 1$ است. (در تمرین آمده است)

مثال ۲۲: ریشه های چهارم واحد را بیابید.

حل: طبق رابطه * ریشه های چهارم واحد عبارتست از $z_K = e^{\frac{2K\pi}{4}i}$ $K = 0, 1, 2, 3$

$K = 0 \Rightarrow z_0 = e^{0i} = 1$

$K = 1 \Rightarrow z_1 = e^{\frac{2\pi}{4}i} = e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}) = i$

$K = 2 \Rightarrow z_2 = e^{\frac{4\pi}{4}i} = e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$ $\Rightarrow z_3 = \overline{z_1}$

$K = 3 \Rightarrow z_3 = e^{\frac{6\pi}{4}i} = e^{\frac{3\pi}{2}i} = \cos(\frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{2}) = -i$

توجه: ریشه های n ام واحد روی دایره ای به مرکز $(0,0)$ و شعاع یک قرار دارند و اگر این نقاط را به ترتیب و به صورت پیوسته به هم وصل کنیم تشکیل یک n ضلعی منتظم می دهند. $(n \geq 3)$
مثلاً ریشه های سوم واحد تشکیل مثلث متساوی الاضلاع و ریشه های چهارم واحد تشکیل مربع و ریشه های پنجم واحد یک پنج ضلعی منتظم است و به همین صورت ریشه های n ام واحد رئوس یک n ضلعی منتظم که روی دایره ای با شعاع یک و مرکز $(0,0)$ قرار دارند تشکیل می دهند.

ریشه های n ام عدد مختلط دلخواه (یعنی حل معادله $z^n = w$) به عبارت دیگر $z = \sqrt[n]{w}$:
فرض کنید که w یک عدد دلخواه باشد می توان فرض کرد که $w = |w| e^{i\alpha}$. هدف یافتن عددهای مختلط $z = |z| e^{i\theta}$ است که در معادله $z^n = w$ صدق کنند پس اگر داشته باشیم $z^n = w$ آنگاه

$$|w| e^{i\alpha} = |z|^n e^{in\theta} \Rightarrow \begin{cases} |w| = |z|^n \\ e^{in\theta} = e^{i\alpha} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} |z| = \sqrt[n]{|w|} \\ \cos n\theta + i\sin n\theta = \cos\alpha + i\sin\alpha \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos n\theta = \cos\alpha \\ \sin n\theta = \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow n\theta = 2K\pi + \alpha \Rightarrow \theta = \frac{2K\pi}{n} + \frac{\alpha}{n}$$

بنابراین ریشه های n ام عدد مختلط w عبارت است از

$$w_K = \sqrt[n]{|w|}\, e^{(\frac{2K\pi}{n} + \frac{\alpha}{n})i} \quad (**)$$
$$= \sqrt[n]{|w|}\, e^{\frac{2K\pi}{n}i} e^{\frac{\alpha}{n}i} = \sqrt[n]{|w|}\, z_K\, e^{\frac{\alpha}{n}i} \quad K = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$$

پس ریشه های n ام عدد مختلط w عبارتند از

$$\boxed{w_K = \sqrt[n]{|w|}\, z_K\, e^{\frac{\alpha}{n}i} \quad (***) \quad K = 0, 1, 2, \dots, (n-1)}$$

$K = 0 \Rightarrow w_0 = \sqrt[n]{|w|}\, e^{(\frac{\alpha}{n})i}$ زیرا $z_0 = 1$ پس

$K = 1 \Rightarrow w_1 = \sqrt[n]{|w|}\left[\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right] e^{\frac{\alpha}{n}i}$

$K = 2 \Rightarrow w_2 = \sqrt[n]{|w|}\left[\cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n}\right] e^{\frac{\alpha}{n}i}$

و باقی ریشه ها به همین صورت.

مثال ۲۱: ریشه‌های پنجم واحد عدد مختلط $w=4-4i$ را بدست آورید

حل:
$|w|=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$ و $\tan\alpha=\frac{-4}{4}=-1 \Rightarrow \alpha=\frac{7\pi}{4}$

طبق فرمول (**) ریشه های پنجم واحد عدد مختلط $w=4-4i$ عبارتند از

$$w_K=\sqrt[5]{\sqrt{32}}\, e^{\left(\frac{2K\pi}{5}+\frac{7\pi}{20}\right)i} \qquad K=0,1,2,3,4$$

$$\sqrt[5]{\sqrt{32}}=\sqrt[10]{2^5}=\sqrt{2}$$

$$K=0 \Rightarrow w_0=\sqrt{2}\, e^{\frac{7\pi}{20}i}=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{20}\right)+i\sin\frac{7\pi}{20}\right]$$

$$K=1 \Rightarrow w_1=\sqrt{2}\, e^{\left[\frac{2\pi}{5}+\frac{7\pi}{20}\right]i}=\sqrt{2}\, e^{\frac{15\pi}{20}i}=\sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi}{4}i}=\sqrt{2}\left[\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right]=\sqrt{2}\left[\frac{-\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$\Rightarrow w_1=-1+i$$

$$K=2 \Rightarrow w_2=\sqrt{2}\, e^{\left[\frac{4\pi}{5}+\frac{7\pi}{20}\right]i}=\sqrt{2}\, e^{\frac{23\pi}{20}i}=\sqrt{2}\left[\cos\left(\pi+\frac{3\pi}{20}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{3\pi}{20}\right)\right]$$

$$\Rightarrow w_2=\sqrt{2}\left[-\cos\left(\frac{3\pi}{20}\right)-i\sin\left(\frac{3\pi}{20}\right)\right]$$

$$K=3 \Rightarrow w_3=\sqrt{2}\, e^{\left(\frac{6\pi}{5}+\frac{7\pi}{20}\right)i}=\sqrt{2}\, e^{\frac{31\pi}{20}i}=\sqrt{2}\left[\cos\left(2\pi-\frac{9\pi}{20}\right)+i\sin\left(2\pi-\frac{9\pi}{20}\right)\right]$$

$$\Rightarrow w_3=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{9\pi}{20}\right)-i\sin\frac{9\pi}{20}\right]$$

$$K=4 \Rightarrow w_4=\sqrt{2}\, e^{\left(\frac{8\pi}{5}+\frac{7\pi}{20}\right)i}=\sqrt{2}\, e^{\frac{39\pi}{20}i}=\sqrt{2}\left[\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{20}\right)+i\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{20}\right)\right]$$

$$\Rightarrow w_4=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{20}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{20}\right)\right]$$

مثال ۲۲: ریشه‌های پنجم واحد عدد $w=1+i$ را بیابید.

حل:
$w=1+i \rightarrow |w|=\sqrt{2}$ و $\tan\theta=\frac{1}{1} \rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$

$$w_K=\sqrt[5]{\sqrt{2}}\, e^{\left(\frac{2K\pi}{5}+\frac{\pi}{20}\right)i}=\sqrt[10]{2}\left[\cos\left(\frac{2K\pi}{5}+\frac{\pi}{20}\right)+i\sin\left(\frac{2K\pi}{5}+\frac{\pi}{20}\right)\right]$$

که در آن $K=0,1,2,3,4$

$$w_0=\sqrt[10]{2}\left[\cos\frac{\pi}{20}+i\sin\frac{\pi}{20}\right]$$

$$w_1=\sqrt[10]{2}\left[\cos\left(\frac{9\pi}{20}\right)+i\sin\frac{9\pi}{20}\right]$$

$$w_2=\sqrt[10]{2}\left[\cos\frac{17\pi}{20}+\sin\frac{17\pi}{20}\right]=\sqrt[10]{2}\left[-\cos\frac{3\pi}{20}+i\sin\frac{3\pi}{20}\right]$$

$$w_3=\sqrt[10]{2}\left[\cos\left(\frac{25\pi}{20}\right)+i\sin\frac{25\pi}{20}\right]=\sqrt[10]{2}\left[\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sqrt[10]{2}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right]$$

$$w_4=\sqrt[10]{2}\left[\cos\left(\frac{33\pi}{20}\right)+i\sin\left(\frac{33\pi}{20}\right)\right]=\sqrt[10]{2}\left[\cos\left(2\pi-\frac{7\pi}{20}\right)+i\sin\left(2\pi-\frac{7\pi}{20}\right)\right]$$

$$\Rightarrow w_4=\sqrt[10]{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{20}\right)-i\sin\frac{7\pi}{20}\right]$$

مثال ۲۳: ریشه های سوم عدد مختلط $w=-i$ را بیابید.

حل

$w=-i \rightarrow |w|=1$ و $\theta=\frac{3\pi}{2}$

$w_K=\sqrt[3]{1}\, e^{\left(\frac{2k\pi}{3}+\frac{3\pi}{6}\right)i}=e^{\left(\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)i}$ $\quad k=0,1,2$

$k=0 \Rightarrow w_0=e^{\frac{\pi}{2}i}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$

$k=1 \Rightarrow w_1=e^{\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)i}=e^{\left(\frac{7\pi}{6}\right)i}=\cos(\pi+\frac{\pi}{6})+i\sin(\pi+\frac{\pi}{6})=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

$k=2 \Rightarrow w_2=e^{\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)i}=e^{\frac{11\pi}{6}i}=\cos(2\pi-\frac{\pi}{6})+i\sin(2\pi-\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

مثال ۲۴: معادله $z^4+4z^2+4=0$ را حل کنید.

حل: قرار می دهیم $z^2=w$ بنابراین $w^2+4w+4=0$ یعنی $(w+2)^2=0$ یعنی $w=-2$

یعنی می بایست معادله $z^2=-2$ را حل کنیم که جوابهای آن عبارت است از $z=\sqrt{2}i$ و $z=-\sqrt{2}i$.

مثال ۲۵: معادله $z^4+(1+i)z^2+i=0$ را حل کنید.

حل: قرار می دهیم $z^2=w$ پس $w^2+(1+i)w+i=0$ که در آن $a=1$ و $c=i$ و $b=a+c=1+i$ که در این صورت $w=-1$ و $w=-\frac{c}{a}=-i$ یعنی $z^2=-1$ و $z^2=-i$ پس $z^2=-1$ دارای جوابهای i و $-i$

است و معادله $z^2=-i$ یعنی ریشه های دوم عدد $-i$ که عبارت است از:

زیرا $|z|=1$ و $\theta=\frac{3\pi}{2}$ پس

$z_K=\sqrt[2]{1}\, e^{\left(\frac{2k\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)i}=e^{\left(k\pi+\frac{3\pi}{4}\right)i}$ $\quad K=0,1$

$k=0 \Rightarrow e^{\frac{3\pi}{4}i}=\cos(\frac{3\pi}{4})+i\sin(\frac{3\pi}{4})=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}$

$k=1 \Rightarrow z_1=e^{\left(\pi+\frac{3\pi}{4}\right)i}=e^{\frac{7\pi}{4}i}=\cos(2\pi-\frac{\pi}{4})+i\sin(2\pi-\frac{\pi}{4})=\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow z_1=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}$

مثال ۲۶: معادله $1+z+z^2+z^3=0$ را حل کنید.

حل: می دانیم که $1+z+z^2+z^3=\frac{1-z^4}{1-z}=0$ بنابراین باید معادله $z^4=1$ را حل کنیم که $z\neq 1$.

یعنی یافتن ریشه های چهارم واحد مجز $z\neq 1$ که در مثال ۲۲ حل شد یعنی جوابها عبارتند از i و $-i$ و -1.

۱- عبارات زیر را ساده کنید (با صورت $a+ib$ بنویسید)

a) $(4+i)(3+2i)(1-i)$

b) $\dfrac{(2+i)(3-2i)(1+2i)}{(1-i)^2}$

c) $(2i-1)^2\left(\dfrac{4}{1-i}+\dfrac{4-i}{1+i}\right)$

d) $\dfrac{i^4+i^9+i^{16}}{2-i^5+i^{10}+i^{15}}$

e) $3\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2-2\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$

f) $\left(\dfrac{1}{1-i}+1+i\right)^2\left(\dfrac{1}{1+i}+1+i\right)^2$

۲- عبارات زیر را به صورت قطبی بنویسید (با صورت $|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$ یا $|z|e^{i\theta}$)

a) $2-2i$

b) $-1+\sqrt{3}\,i$

c) $2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}$

d) $-7i$

e) $(2+2i)^4$

f) $\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{2}i\right)\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2}+\dfrac{5\sqrt{2}}{2}i\right)$

g) $\dfrac{3}{(1-i)^4}$

h) $\left(\dfrac{4}{-1+i\sqrt{3}}\right)^{12}$

۳- حاصل عبارتهای زیر را معین کنید (ریشه اعداد مختلط)

a) $(1+i)^{\frac{1}{3}}$ b) $(2\sqrt{3}+2i)^{\frac{1}{4}}$ c) $\sqrt[6]{i}$ d) $\dfrac{\sqrt[3]{1-i}}{(1+i\sqrt{3})^5}$

e) $\sqrt[5]{i-\sqrt{3}}$ f) $\sqrt[3]{1-i}\,\sqrt[5]{1+i}$ g) $\sqrt[4]{1-i}$

۴- اگر u یکی از ریشه های nام واحد غیر از عدد یک باشد، آنگاه حاصل عبارت زیر را معین کنید

$$S=u+u^2+u^3+\cdots+u^n$$

۵- ریشه های معادلات زیر را بیابید (معادلات زیر را حل کنید)

a) $z^4-z^3+z^2-z+1=0$

b) $1+2z+2z^2+\cdots+2z^{n-1}+2z^n=0$

c) $\left(1+\dfrac{ix}{n}\right)^n=\left(1-i\dfrac{x}{n}\right)^n$

d) $-1+z-z^2+z^3=0$

e) $1+z+z^2+\cdots+z^6=0$

f) $z^6-(1+2i)z^3-1+i=0$

g) $1+z+z^2+z^3+z^4+z^5=0$

h) $z^4-2z^2+4=0$

۶- عدد مختلط z را طوری معین کنید که سه عدد مختلط i و z و iz رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع باشد

۷- اگر $z=x+iy$ و $w=u+iv$ از روی روابط زیر u و v را بر حسب x و y و همچنین x و y را بر حسب u و v بیابید:

الف) $w=\frac{-1}{z}$ ب) $w=\frac{z}{1+z}$

۸- نشان دهید که اگر عدد مختلط z ریشه معادله $f(x)=0$ باشد آنگاه $\bar{z}$ هم ریشه این معادله است که در آن $f(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه n است.

۹- مکان هندسی نقاطی از صفحه را معین کنید که در روابط زیر صدق کند.

الف) $az^3+bz^2+cz=a\bar{z}^3+b\bar{z}^2+c\bar{z}$ ب) $|z-1|=1$

ج) $|z-1|=|z+1|$ د) $z+\bar{z}=|z|^2$

۱۰- اگر α و β ریشه های معادله $z^2-2z+4=0$ باشند نشان دهید که

$$\alpha^n+\beta^n=2^{n+1}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$ دلخواه $n\in\mathbb{N}$

۱۱- معادله $z^5-1-i=0$ را حل کنید.

۱۲- اگر $z=-1+\sqrt{3}i$ آنگاه z^{50} را با ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

۱۳- اگر $z=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ آنگاه z^{50} را حساب کنید.

۱۴- نشان دهید که الف) $\cosh(i\theta)=\cos\theta$ و $\cos(i\theta)=\cosh\theta$

ب) $\sinh(i\theta)=i\sin\theta$ و $\sin(i\theta)=i\sinh\theta$

۱۵- اگر $z=x+iy$ ثابت کنید که $|\sin z|=\sqrt{\sin^2x+\sinh^2y}$

۱۶- معادله $\sin z=2$ را حل کنید.

۱۷- ریشه های چهارم $z=-1+i\sqrt{3}$ را بیابید ب) ریشه های سوم $z=2+2i$ را بیابید.

ج) ریشه های دوم عدد $z=1+\sqrt{3}i$ را بیابید

د) مطلوب است محاسبه $z=(-1+i\sqrt{3})^{30}(2+2i)^{25}(1+i\sqrt{3})^{30}$