فصل ۲ روش های اثبات احکام و قضیه های ریاضی و حل مسئله

قضیه های ریاضی از نظر نوع به دو دسته تقسیم می شوند. ۱) قضیه های کلی ۲) قضیه های جزئی

قضیه های کلی: قضیه های کلی همراه با سورهای عمومی، احکام درستی هستند (گزاره نمای درست) که برای همه اعضای عالم سخن برقرارند.

قضیه های جزئی: قضیه های جزئی، احکام درستی هستند که برای بعضی از اعضای عالم سخن برقرار هستند.

مثال ۱: برای هر دو عدد حقیقی نامنفی x و y نامساوی $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ برقرار است. این یک حکم کلی (قضیه کلی) است که عالم سخن آن مجموعه $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ است

$A_2 = \frac{x+y}{2}$ میانگین حسابی دو عدد حقیقی نامنفی x و y است.

$G_2 = \sqrt{xy}$ میانگین هندسی دو عدد حقیقی نامنفی x و y است

مثال ۲: سه عدد صحیح مانند x و y و z وجود دارد که مجموع و حاصل ضرب آنها با هم مساوی است یعنی

$$xyz = x+y+z$$

این حکم یک قضیه جزئی است و عالم سخن آن $\mathbb{Z}$ هستند. $\exists x, y, z \in \mathbb{Z}$

روش های اثبات قضیه کلی و جزئی با هم فرق دارند: در مثال ۱ می توان از اثبات زیر استفاده کرد (یعنی با روش زیر می توان ثابت کرد)

$$\forall x \geq 0,\ \forall y \geq 0:\ \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

دو عدد نامنفی x و y دلخواه انتخاب می کنیم ولی پس از انتخاب آنها را ثابت فرض می کنیم و برای اثبات نامساوی دلیل می آوریم. چون $(x-y)^2 \geq 0$ پس $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$ و بنابراین $x^2 + y^2 \geq 2xy$. ⊛

چون x و y هر دو نامنفی هستند می توانیم به دو طرف نامساوی ⊛ $2xy$ اضافه کنیم بنابراین

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy \geq 4xy \Rightarrow (x+y)^2 \geq 4xy \Rightarrow$$

از طرفین جذر می گیریم

$$\sqrt{(x+y)^2} \geq \sqrt{4yx} \Rightarrow x+y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

برای مثال ۲ که قضیه جزئی است کافی است سه عدد $x=1$ و $y=2$ و $z=3$ را انتخاب کرد و دید که $1+2+3 = 1 \times 2 \times 3$ بنابراین حکم محقق می شود

توجه: برای رد کردن یک حکم کلی (قضیه کلی) می توان از مثال نقض کمک گرفت (زیرا نقیض قضیه کلی یک قضیه جزئی است) این روش که برای رد کردن قضیه کلی است را روش مثال نقض می نامیم (با مثال زیر توضیح کنید)

مثال ۳: حکم هر عدد طبیعی مجموع سه مربع کامل است که یک حکم کلی است می توان به صورت زیر آن را رد کرد. عدد طبیعی ۷ در نظر می گیریم عدد ۷ مجموع مجذور سه عدد نیست یعنی سه عدد طبیعی m و n و p پیدا نمی شوند که $7 = m^2 + n^2 + p^2$ پس این حکم رد می شود.

تبصره: بیشتر قضایای ریاضی به صورت گزاره دوشرطی و یا گزاره شرطی هستند بنابراین می‌توان برای اثبات آنها با صورت زیر عمل کرد.

روشهای اثبات قضیه هایی که با صورت شرط (استلزام $P \Longrightarrow Q$) هستند به صورت زیر است:

۱- روش استدلال قیاسی (استنتاجی) ۲- روش برهان خلف ۳- روش عکس نقیض ۴- روش با انتفای مقدم ۵- روش استقرایی - ۶- روش مسئله را داشته فرض کردن ۷- روش بررسی تمام حالات ممکنه ۸- استفاده از مسائل دیگر و مرتبط

روشهای اثبات قضیه هایی که با صورت دوشرطی (هم ارزی $P \Longleftrightarrow Q$ یا $P \equiv Q$) هستند، چون گزاره دوشرطی را می‌توان به صورت $(P \Longleftrightarrow Q) \equiv (P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow P)$ نوشت بنابراین تمام روشهای که برای گزاره شرطی در بالا گفته شد می‌توان برای $P \Rightarrow Q$ و $Q \Rightarrow P$

توجه: در درس مبانی ریاضی با روشهای استدلال قیاسی - برهان خلف - عکس نقیض - با انتفای مقدم - روش استقرایی آشنا شده ایم. بنابراین به سه روش مسئله را داشته فرض کردن و روش بررسی تمام حالات ممکنه و استفاده از مسائل دیگر و مرتبط می‌پردازیم و در ادامه هم برای روشهای دیگر چند مثال می‌آوریم.

مثال ۴: نشان دهید که اگر x یک عدد طبیعی باشد آنگاه x^2+x+1 یک عدد فرد است.

حل (با روش تمام حالات ممکن): در این روش تمام حالاتی که ممکن است برای عدد طبیعی x پیش بیاید مانند x زوج باشد و x فرد باشد نشان می‌دهیم که x^2+x+1 فرد است.

فرض کنید که x عدد طبیعی زوج باشد بنابراین می‌توان x را به صورت $x = 2K$ نوشت که در آن K عضوی دلخواه از مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ است

$$x=2K \Rightarrow x^2+x+1=(2K)^2+2K+1 = 2K[2K+1]+1$$

چون $2K[2K+1]$ عدد طبیعی زوج است پس عدد $2K[2K+1]+1$ فرد است.

حالت فرد بودن x: فرض کنید که x عدد طبیعی فرد باشد پس $x=2K+1$ که در آن $K\in\mathbb{N}$ دلخواه است

$$x=2K+1 \Longrightarrow x^2+x+1=(2K+1)^2+(2K+1)+1=(2K+1)[2K+1+1]+1=$$

$$=(2K+2)(2K+1)+1=2(K+1)(2K+1)+1$$

چون $2(K+1)(2K+1)$ عدد زوج طبیعی است پس عدد $2(K+1)(2K+1)+1$ یک عدد طبیعی فرد است پس x^2+x+1 عدد طبیعی فرد است.

مثال ۵: نشان دهید که برای هر عدد طبیعی x، عدد x^2+x زوج است.

حل: روش اول (در نظر گرفتن تمام حالات ممکنه برای x تمرین برای دانشجویان)

روش دوم: استفاده از مسائل دیگر و مرتبط در صفحه بعد

روش استفاده از مسئله دیگر و مرتبط : برای حل یک حکم ریاضی (قضیه یا مسئله ریاضی) می‌توان از قضیه و یا مسئله ریاضی اثبات شده که به مسئله مورد تفکر مرتبط است، کمک گرفت

در مثال ۴ دیدیم که اگر x یک عدد طبیعی باشد آنگاه عدد x^2+x+1 عدد طبیعی فرد است. با کمک این مثال چون x^2+x+1 یک عدد طبیعی فرد است پس $x^2+x=(x^2+x+1)-1$ یک عدد طبیعی زوج است

تبصره ۱۵: روش استفاده از مسئله دیگر و مرتبط به روش استفاده از مسائل کمکی و مرتبط‌ها هم معروف است.
معمولاً مسائل کمکی به صورت فرمول های ریاضی از قبیل اتحادها (اتحادهای جبری - اتحادهای مثلثاتی - اتحادهای هذلولوی) لم‌ها (قضیه های کاربردی و کوچک) جدول ها (جدول مشتق گیری‌ها - جدول انتگرال گیری جدول های آماری - جدول مقادیر لگاریتم و جدول مقدارهای مثلثاتی و ....) فرمول های محاسباتی (مانند $n!$ و $\binom{n}{r}=C(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}$) و فرمول های مجموع یابی و فرمول های محاسبه خطوط تقارن در چند ضلعی ها و فرمول های محاسبه اندازه زاویه و قطرهای یک چند ضلعی و ...)

مثال ۶: به کمک اتحادهای $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ و $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ و $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ می‌توان انتگرال های زیر را حل کرد:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x\cdot \sin^2 x}=\int \frac{1\,dx}{\cos^2 x\sin^2 x}=\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}=$$

$$=\int \sec^2 x\,dx+\int \csc^2 x\,dx=\tan x-\cot x+C$$

$$\int \cos^2 x=\int \frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x$$

$$\int \sin^2 x\,dx=\int \frac{1-\sin 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$$

[توجه: انتگرال‌های توان های زوج $\sin x$ و $\cos x$ هم با استفاده از چند بار کمک گرفتن از روابط $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ و $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ می‌توان حل کرد]

مثال ۷: نشان دهید که تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه n عضوی برابر با 2^n است. [قضیه ای در مبانی ریاضی]

حل: در یک قضیه در مبانی ریاضی نشان داده می‌شود که تعداد زیر مجموعه های r عضوی از یک مجموعه n عضوی برابر با $\binom{n}{r}=C(n,r)$ است. از طرفی می‌توان ثابت کرد که:

$$2^n=C(n,0)+C(n,1)+C(n,2)+\dots+C(n,n)$$

بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی برابر است با $2^n = C(n,0)+C(n,1)+\dots+C(n,n)$

مثال ۸: برای نشان دادن مجموع زوایای داخلی یک مثلث برابر 180° درجه است می‌توان از زاویه‌های خارجی یک مثلث کمک گرفت. و برعکس می‌توان از مجموع زوایای داخلی یک مثلث ۱۸۰ درجه است برای محاسبه زاویه خارجی مثلث کمک گرفت. (می‌توان زاویه‌های داخلی مثلث را قیچی کرد و کنار هم گذاشت تا زاویه نیم صفحه ایجاد شود)

مثال ۹: از حل معادله درجه ۲ به صورت $ax^2+bx+c=0$ برای حل معادله $ay^4+by^2+c=0$ کمک گرفت. (زیرا از مجهول و معادل گرفتن (تغییر متغیر $x=y^2$) می‌توان کمک گرفت.

$$x^2-5x+6=0 \Rightarrow x=2,\ x=3$$

$$y^4-5y+6=0 \Rightarrow y^2=2,\ y^2=3 \Rightarrow y=\pm\sqrt{2},\ y=\pm\sqrt{3}$$

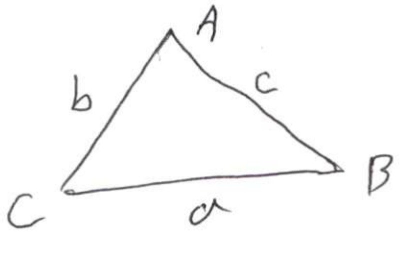
تمرین:

۱. با کمک ضرب داخلی بردارها نشان دهید که برای چهار عدد حقیقی دلخواه a و b و c و d نامساوی زیر برقرار است:

$$|ac+bd| \le \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$$

۲. تمرین ۱ را به کمک اعداد مختلط حل کنید.

۳. با کمک ضرب خارجی بردارها نشان دهید که در مثلث دلخواه ABC (شکل زیر) تساوی‌های زیر برقرار است



$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$

۴. برای هر عدد طبیعی n نشان دهید که $C(n,n)=C(n,0)=1$

۵. با کمک اتحاد مزدوج، عبارت‌های زیر را تجزیه کنید:

الف) x^4+1 ب) x^4+x^2+1 ج) $(a-b)^2-(a+b)^2$

۶. با کمک حاصل ضرب داخلی و خارجی بردارها حجم یک متوازی السطوح با یال‌های $\vec{A}=(2,3,1)$ و $\vec{B}=(-1,4,2)$ و $\vec{C}=(3,1,2)$ را بیابید.

۷. با کمک فاکتوریل الف) به چند طریق می‌توانند ۹ نفر در یک ردیف سطری (یا ستونی) قرار گیرند؟

ب) به چند طریق می‌توانند ۹ نفر دور یک میز گرد بنشینند؟

ج) با ۹ مهره به رنگ‌های متفاوت چند گردنبند می‌توان ساخت؟

روش مسئله را دانسته فرض کردن (یا روش از آخر به اول رسیدن) در این روش فرض می‌کنیم که حکم ریاضی (قضیه یا مسئله) درست باشد و ما آن را دانسته فرض می‌کنیم و از روی نتیجه به فرض می‌رسیم. به عبارت دیگر از آخر به اول می‌رسیم و سپس از روی آن مراحل حل (روش اثبات) را تشخیص می‌دهیم به همین منظور این روش به روش از آخر به اول رسیدن هم نام دارد (در سطح پیشرفته‌تر و ساختن ابزارها و وسایل به آن مهندسی معکوس گفته می‌شود)

تبصره: معمولاً در اثبات قضیه‌های شرطی ($p \Rightarrow q$) از فرض کمک گرفته و با استفاده از اتحادها، کم و زیاد کردن و ضرب و تقسیم کردن به نتیجه مورد نظر q می‌رسیم و حال وقتی که می‌خواهیم از q به p برسیم هم معمولاً از اتحادها، کم و زیاد کردن و ضرب و تقسیم کردن کمک می‌گیریم و چون برخی از این مراحل نوشته نمی‌شود تشخیص رسیدن از p به q و برعکس خیلی آسان نیست و روش مسئله دانسته فرض کردن ممکن است برای حل این مسئله جواب دهد.

البته برخی مواقع لازم نیست که روی p کار کنیم و به q برسیم و مستقیماً روی q کار می‌کنیم و هر وقت لازم باشد از فرض p هم کمک می‌گیریم.

مثال ۱: در برخی از مجله‌ها که برای کودکان و نوجوانان (مانند کیهان بچه‌ها) نوشته می‌شود برای سرگرمی راه رسیدن یک حیوان (مثلاً خرگوش) به غذای مورد نظرش (مثلاً هویج) از بچه‌ها خواسته می‌شود. در مقابل حیوان چندین راه وجود دارد که تعداد زیادی از آن راهها به بن‌بست می‌انجامد و فقط یک راه یا دو راه وجود دارد که حیوان از طریق آن می‌تواند به غذای مورد نظرش برسد. اگر فرض کنیم که حیوان یک بار قبلاً مسیر (راه) مورد نظر را طی کرده است و به غذایش رسیده است (یعنی مسئله را فرض کردن) ما راه برگشت از غذا به مکان اولیه حیوان را طی کنیم می‌توانیم مسیر یا مسیرهایی که حیوان می‌تواند با غذایش برسد را بسیار سریع تعیین کرده‌ایم. پس آسان‌تر این است که از غذای حیوان شروع کنیم و به حیوان برسیم.

مثال ۲: در تعریف حد وقتی می‌خواهیم از تعریف حد برای اثبات وجود حد استفاده کنیم می‌توانیم مسئله را دانسته فرض کنیم و برای هر $\varepsilon>0$ یک $\delta>0$ پیدا کنیم بطوریکه $0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

به عبارت دیگر: $\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 : \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

تعریف حد: فرض کنید که $f(x)$ تابعی باشد که روی بازه باز I که شامل a است بجز احتمالاً در خود $x=a$ تعریف شود. حد $f(x)$ وقتی که x به سمت a میل می‌کند برابر با L است. می‌نویسیم $\lim_{x \to a} f(x) = L$ هرگاه به ازای هر $\varepsilon>0$ هر قدر کوچک، عدد مثبتی مانند δ وجود داشته باشد بطوریکه

$$0<|x-a|<\delta \Longrightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

به نماد ریاضی: $\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 : \quad 0<|x-a|<\delta \Longrightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

نمونه ۱: با استفاده از تعریف حد ثابت کنید که $\lim_{x \to 1} (2x-4) = -2$

اثبات: تابع $f(x)=2x-4$ روی هر بازه‌ای مانند I شامل $x=1$ تعریف شده است زیرا $D_f=\mathbb{R}$
بنابراین هر بازه بازی مانند I که در نظر بگیریم شرایط تعریف حد را بر آورده می‌کند، حال مسئله را دانسته فرض می‌کنیم
شامل عدد ۱

و فرض می‌کنیم که برای هر $\varepsilon>0$ یک $\delta>0$ وجود دارد بطوریکه $0<|x-1|<\delta \Rightarrow |2x-4-(-2)|<\varepsilon$
و روی نامساوی $|2x-4-(-2)|<\varepsilon$ کار می‌کنیم و از روی آن یک δ مثبت وابسته به ε را بدست می‌آوریم
سپس نشان می‌دهیم که برای این δ ای بدست آمده $|2x-4-(-2)|<\varepsilon$ است و حد ثابت می‌شود

$$|2x-4-(-2)|=|2x-2|=2|x-1|<\varepsilon \Rightarrow |x-1|<\frac{\varepsilon}{2}$$

چون می‌خواهیم وقتی که $0<|x-1|<\delta$ نشان دهیم که $|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}$ است پس می‌توان
$\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ (یا هر عدد مثبت کوچکتر از $\frac{\varepsilon}{2}$ را انتخاب کرد)

حال با فرض $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ برای هر ε مثبت دلخواه که $0<|x-1|<\delta$ است نتیجه می‌شود

$$|2x-4-(-2)|=|2x-2|=2|x-1|<2\delta=2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)=\varepsilon \Rightarrow 2|x-1|<\varepsilon$$

نمونه ۲: با استفاده از تعریف حد ثابت کنید که $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$

اثبات: چون تابع $f(x)=x^2$ روی تمام اعداد حقیقی تعریف شده است (زیرا $D_f=\mathbb{R}$) پس تابع $f(x)=x^2$ روی هر بازه بازی که شامل عدد ۲ باشد مانند بازه باز $I=(1,3)$ (برای نمونه) تعریف شده است پس شرایط تعریف حد برای هر بازه باز I شامل ۲ برقرار است

حال مسئله را دانسته فرض می‌کنیم و فرض می‌کنیم که برای هر $\varepsilon>0$ یک $\delta>0$ وجود دارد بطوریکه

$$0<|x-2|<\delta \Rightarrow |x^2-4|<\varepsilon$$

روی نامساوی $|x^2-4|<\varepsilon$ کار می‌کنیم و از روی آن یک δ مثبت وابسته به ε را بدست می‌آوریم

$$|x^2-4|=|(x+2)(x-2)|=|x+2||x-2|<\varepsilon \Rightarrow |x-2|<\frac{\varepsilon}{|x+2|}$$

(چون $|x+2|$ مثبت است پس طرفین نامساوی را بر $|x+2|$ تقسیم کرده‌ایم)

چون می‌خواهیم وقتی که $0<|x-2|<\delta$ آنگاه نامساوی $|x-2|<\frac{\varepsilon}{|x+2|}$ برای هر x در بازه باز I شامل ۲ برقرار باشد، یک بازه خاص برای I اختیار می‌کنیم و به کمک آن یک کران پایین برای $\frac{\varepsilon}{|x+2|}$ بدست می‌آوریم

برای این منظور یک کران بالایی δ درنظر می‌گیریم طوری که به ازای این کران بالا بازه خاص I به دست آمده در شرط تعریف حد صادق باشد یعنی تابع $f(x)=x^2$ روی این بازه I تعریف شود.

کران بالای δ را عدد 1 انتخاب می‌کنیم یعنی فرض کنید که $1 > \delta > 0$ باشد پس $|x-2| < 1$

حال $-1 < x-2 < 1$ پس $2-1 < x < 2+1$ یعنی $1 < x < 3$ یعنی بازه خاص $I=(1,3)$ که شامل 2 است را در نظر می‌گیریم.

$$\forall x \in I=(1,3) : |x+2| = x+2 \quad , \quad \frac{\varepsilon}{5} < \frac{\varepsilon}{|x+2|} = \frac{\varepsilon}{x+2} < \frac{\varepsilon}{3}$$

زیرا $1 < x < 3$ نتیجه می‌دهد که $3 < x+2 < 5$ باشد پس $\frac{\varepsilon}{5} < \frac{\varepsilon}{x+2} < \frac{\varepsilon}{3}$

حال $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{5}\}$ را انتخاب می‌کنیم [یعنی δ می‌نشیند کران بالای δ یعنی عدد 1 و کوچکترین کران پایین $\frac{\varepsilon}{x+2}$ یعنی $\frac{\varepsilon}{5}$ انتخاب می‌کنیم.

توجه: برای اینکه در مقدار δ اشتباهی صورت نگیرد به صورت زیر عمل می‌کنیم

$$|x-2| < \ ? \ < \frac{\varepsilon}{|x+2|} < \frac{\varepsilon}{3}$$

جای خالی بین دو نامساوی که با علامت سؤال نشان داده شده است همان $\frac{\varepsilon}{5}$ است

اگر $1 < \frac{\varepsilon}{5}$ یعنی $\varepsilon > 5$ در این صورت $\delta = 1$ حال اگر $0 < |x-2| < \delta$ آنگاه

$$0 < |x-2| < 1 < \frac{\varepsilon}{5} < \frac{\varepsilon}{|x+2|}$$

اگر $1 \geq \frac{\varepsilon}{5} > 0$ یعنی $5 \geq \varepsilon > 0$ در این صورت $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ (البته می‌توان $\frac{\varepsilon}{5} \geq \delta$ انتخاب کرد)

حال اگر $0 < |x-2| < \delta$ و $1 \geq \frac{\varepsilon}{5} > |x-2|$ آنگاه $|x-2| < \frac{\varepsilon}{5} < \frac{\varepsilon}{|x+2|}$

پس: برای هر $\varepsilon > 0$:

وقتی که $0 < |x-2| < \delta$ و $0 < |x-2| < 1$ و $|x-2| < \frac{\varepsilon}{|x+2|}$

عبارت $0 < |x-2| < 1$ ایجاب می‌کند که $x \neq 2$ و $x \in I$ و حصول عبارت $|x-2| < \frac{\varepsilon}{|x+2|}$ معادل $|x^2-4| < \varepsilon$ است بنابراین

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$$

نمونه ۳: با استفاده از تعریف حد ثابت کنید که $\lim_{x\to \frac{1}{2}} \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

اثبات: دامنه تابع $f(x)=\sqrt{x}$ عبارت است از $D_f=[0,+\infty)$ بنابراین تابع $f(x)=\sqrt{x}$ روی هر بازه باز I شامل $\frac{1}{2}$ که شروع بازه (ابتدای بازه I) بزرگتر یا مساوی صفر است مثلاً بازه $I=(0,1)$ تعریف شده است. حال مسئله را دانسته فرض می‌کنیم و فرض می‌کنیم که برای هر $\varepsilon>0$ یک $\delta>0$ وجود دارد که مطلوب ایم

$$0<\left|x-\frac{1}{2}\right|<\delta \Rightarrow \left|\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right|<\varepsilon$$

روی نامساوی $\left|\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right|<\varepsilon$ کار می‌کنیم و از روی آن یک δ مثبت وابسته به ε را بدست می‌آوریم.

$$\left|\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right| = \left|\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\times\frac{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{2}}}\right| = \left|\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{2}}}\right| = \frac{\left|x-\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{2}}} < \varepsilon \Longrightarrow$$

$$\left|x-\frac{1}{2}\right| < \ ? < \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\varepsilon \qquad (*)$$

برای δ یک کران بالا مثلاً $\frac{1}{2}$ انتخاب می‌کنیم:

$$\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}<x-\frac{1}{2}<\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \Rightarrow 0<x<1$$

توجه در اینجا نمی‌توان کران بالای δ را عدد یک انتخاب کرد زیرا اگر کران بالای δ را عدد یک انتخاب کنیم داریم

$$\left|x-\frac{1}{2}\right|<1 \Rightarrow -1<x-\frac{1}{2}<1 \Rightarrow -1+\frac{1}{2}<x<1+\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$$

واضح است که تابع $f(x)=\sqrt{x}$ روی بازه $(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ تعریف نمی‌شود پس نمی‌توان عدد ۱ را به عنوان کران بالای δ انتخاب کرد.

حال چون تابع $f(x)=\sqrt{x}$ روی بازه باز $I=(0,1)$ تعریف شده است پس $\delta=\min\left\{\frac{1}{2},\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right\}$ انتخاب می‌کنیم زیرا

$$0<x<1 \Rightarrow 0<\sqrt{x}<1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}<\underset{(1)}{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{2}}}<1+\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}<\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\varepsilon<\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\varepsilon$$

حال در نامساوی $*$ در بین دو نامساوی جای علامت سوال مقدار $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ قرار می‌گیرد پس

$$\left|\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} < \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\varepsilon$$

بنابراین اگر $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}>\frac{1}{2}$ یعنی اگر $\varepsilon>\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ آنگاه δ را برابر عدد $\frac{1}{2}$ انتخاب می‌کنیم و در این صورت اگر $0<\left|x-\frac{1}{2}\right|<\delta$ آنگاه

$$0<\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}<\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\varepsilon$$

بنابراین داریم:

$$\left|\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right| = \frac{\left|x-\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{2}}} < \varepsilon$$

اگر $\frac{1}{2}\geq\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}>0$ یعنی $\frac{\sqrt{2}}{2}\geq\varepsilon$ آنگاه δ را برابر با $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ انتخاب می‌کنیم (می‌توان $\delta\leq\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ را هم انتخاب کرد) در این صورت اگر $0<\left|x-\frac{1}{2}\right|<\delta=\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ آنگاه

$$\left|\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right| = \frac{\left|x-\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{2}}} < \frac{\delta}{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{2}}} < \sqrt{2}\times\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} = \varepsilon$$

زیرا طبق نامساوی (1) $\frac{1}{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{2}}} < \sqrt{2}$

تبصره: در نمونه های قبل می توان بعد از انتخاب δ برحسب ε مرحله برگشت پذیری اگر $0<|x-a|<\delta$ آنگاه $|f(x)-L|<\varepsilon$ را صرف نظر کرد و بیان کرد که روابط بالا برگشت پذیر است.

نمونه ۴: با استفاده از تعریف حد نشان دهید که $\lim\limits_{x\to a}|x| = |a|$.

حل: می دانیم که تابع $f(x)=|x|$ روی مجموعه $\mathbb{R}$ تعریف شده است یعنی $D_f=\mathbb{R}$ پس تابع روی هر بازه باز I شامل a تعریف شده است. حال مسئله را داشته فرض می کنیم یعنی فرض کنید که برای هر $\varepsilon>0$ وجود داشته باشد $\delta>0$ که بطوریکه

$$0<|x-a|<\delta \Longrightarrow \big||x|-|a|\big|<\varepsilon$$

طبق تمرین نامساوی $\big||x|-|a|\big|\le|x-a|$ همواره برقرار است پس می توان $\delta=\varepsilon$ انتخاب کرد زیرا با انتخاب $\delta=\varepsilon$ (یا $0<\delta\le\varepsilon$) از $|x-a|<\delta$ داریم:

$$\big||x|-|a|\big|\le|x-a|<\varepsilon$$

نمونه ۵: با استفاده از تعریف حد نشان دهید که $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

حل می دانیم که اگر $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ آنگاه $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$. پس تابع $f(x)$ روی هر بازه باز ما شامل یک I بجز در $x=1$ تعریف شده است پس شرط اولیه حد برقرار است

حال مسئله را داشته فرض می کنیم. یعنی فرض کنید که برای هر $\varepsilon>0$ یک $\delta>0$ وجود داشته باشد بطوریکه

$$0<|x-1|<\delta \Rightarrow \left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon$$

بدیهی است که

$$\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|=\left|(x+1)-2\right|=|x-1|<\delta$$

پس کافی است که $\delta=\varepsilon$ (یا $0<\delta\le\varepsilon$) انتخاب کنیم در این صورت

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists\,\delta=\varepsilon>0;\quad 0<|x-1|<\varepsilon\Longrightarrow\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|=|x-1|<\varepsilon$$

نمونه ۶: با استفاده از تعریف حد نشان دهید که $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+x}{x}=1$

حل: اگر $f(x)=\dfrac{x^3+x}{x}$ آنگاه $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$ بنابراین تابع $f(x)$ روی هر بازه باز I شامل صفر، بجز در صفر تعریف شده است پس شرط اولیه تعریف حد برقرار است

حل با دانستن فرض کردن مسئله نشان می‌دهیم که برای هر $\epsilon>0$ یک $\delta>0$ وجود دارد بطوریکه اگر $0<|x-0|<\delta$ آنگاه $\left|\frac{x^3+x}{x}-1\right|<\epsilon$. بدیهی است که

$$\left|\frac{x^3+x}{x}-1\right| = |x^2+1-1| = |x^2| = |x|^2$$

حال با فرض $\sqrt{\epsilon}=\delta$ (یا $\delta\le\sqrt{\epsilon}$) اگر $0<|x|<\delta$ آنگاه $|x^2|=|x|^2<\delta^2\le\epsilon$

بنابراین با فرض $\delta=\sqrt{\epsilon}$ ،

$$\forall \epsilon>0\ \exists \delta>0 :\ 0<|x|<\delta \Rightarrow \left|\frac{x^3+x}{x}-1\right| = |x^2| = |x|^2 < \delta^2 \le (\sqrt{\epsilon})^2 = \epsilon$$

تمرین:

با استفاده از تعریف حد نشان دهید که حدهای زیر درست است.

1) $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ (اگر n زوج باشد $a>0$ در نظر بگیرید)

2) $\lim_{x\to 1} \frac{2}{(3-x)} = 1$ 3) $\lim_{x\to 2} x^3 = 8$ 4) $\lim_{x\to 11} \sqrt{2x+3} = 5$

۵- برای هر دو عدد حقیقی a و b نشان دهید که:

الف) $|a+b|\le|a|+|b|$ ب) $|a-b|\le|a|+|b|$

ج) $|a-b|\ge|a|-|b|$ د) $\big||a|-|b|\big|\le|a-b|$

۶- الف) نشان دهید که $|\sin a-\sin b|\le|a-b|$

ب) به کمک (الف) ثابت کنید (به کمک تعریف حد) $\lim_{x\to a}\sin x=\sin a$

۷- نشان دهید که اگر $0<a<b$ آنگاه $\sqrt{a}<\sqrt{b}$

۸- نشان دهید که اگر $0<a<b$ آنگاه برای هر عدد طبیعی n ، $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$

۹- نشان دهید که مربع هر عدد زوج، عددی زوج است و مربع هر عدد فرد، عددی فرد است

روش عکس نقیض:

در مبانی ریاضی دیدیم که اگر p و q دو گزاره دلخواه باشند آنگاه دو گزاره شرطی $(p \to q)$ و $(\sim q \to \sim p)$ هم ارزهستند یعنی $(\sim q \to \sim p) \equiv (p \to q)$. گزاره $(\sim q \to \sim p)$ عکس نقیض گزاره $p \to q$ نامیده می‌شود.

بنابراین می‌توان برای اثبات احکام ریاضی به صورت شرطی $p \to q$ عکس نقیض آن $(\sim q \to \sim p)$ را ثابت کرد. به این روش، روش اثبات به روش عکس نقیض می‌گوییم.

مثال ۱: نشان دهید که اگر $x^2 - 3x + 2 < 0$ آنگاه $x > 0$

حل: عکس نقیض این گزاره اگر $x^2 - 3x + 2 < 0$ آنگاه $x > 0$ عبارت است از اگر $x \leq 0$ آنگاه $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ حال از روش عکس نقیض این مثال را حل می‌کنیم

فرض کنید که $x \leq 0$ در این صورت $x - 2 \leq 0$ و $x - 1 \leq 0$ [یعنی یک واحد یا دو واحد از x کم کنیم عدد (که چون منفی است) حاصل منفی می‌باشد] با ضرب این دو نامساوی داریم: $(x-1)(x-2) \geq 0$

بنابراین $(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2 \geq 0$

[این مثال را به دو روش دیگر نیز حل خواهیم کرد (مثال ۴ و ۷)]

یادآوری: تابع $f: X \to Y$ را یک به یک نامیم هرگاه اگر $f(a) = f(b)$ آنگاه $a = b$.

عکس نقیض این گزاره عبارت است از اگر $a \neq b$ آنگاه $f(a) \neq f(b)$.

بنابراین برای نشان دادن اینکه تابع $f: X \to Y$ یک به یک است کافی است نشان دهیم که اگر $a \neq b$ آنگاه $f(a) \neq f(b)$.

مثال ۲: اگر $f: X \to Y$ یک تابع باشد. ثابت کنید اگر برای تمام زیرمجموعه‌های X مانند A و B. $f(A - B) = f(A) - f(B)$ آنگاه f یک به یک است.

اثبات: نشان می‌دهیم که اگر $a \neq b$ آنگاه $f(a) \neq f(b)$ که در آن $a, b \in X$ (یعنی تابع f یک به یک است) پس فرض کنید که $a \neq b$ قرار می‌دهیم $A = \{a\}$ و $B = \{b\}$ و بدیهی است A و B زیرمجموعه X هستند و $A - B \neq \phi$ طبق فرض $\{f(a)\} - \{f(b)\} = f(A) - f(B) = f(A - B) \neq \phi$ بنابراین $f(a) \neq f(b)$ پس تابع f یک به یک است. (توجه: $A - B = \{a\}$ و $f(A - B) = \{f(a)\}$)

یادآوری: قضیه: اگر تابع $y = f(x)$ در نقطه x_1 مشتق پذیر باشد آنگاه $f(x)$ در نقطه x_1 پیوسته است، بنابراین عکس نقیض آن عبارت است از اگر تابع $f(x)$ در x_1 پیوسته نباشد آنگاه تابع $f(x)$ در x_1 مشتق پذیر نیست.

از این قضیه برای نشان دادن اینکه یک تابع در یک نقطه مشتق پذیر نیست (بدون مشتق گیری) استفاده می‌کنیم

مثال ۳: نشان دهید که تابع $f(x) = \begin{cases} 9 - x^2 & x \leq 2 \\ 3x + 2 & x > 2 \end{cases}$ در $x = 2$ مشتق پذیر نیست.

حل: تابع $f(x)$ در $x=2$ پیوسته نیست زیرا $f(2)=9-4=5$ و $\lim_{x\to 2^+} f(x)=4+2=6 \neq \lim_{x\to 2^-} f(x)=9-4=5$
بنابراین تابع $f(x)$ در $x=2$ مشتق پذیر نیست.

توجه: تابع f می‌تواند به یکی از دلایل زیر در عددی مانند $x=a$ مشتق پذیر نباشد:

۱) تابع f در $x=a$ پیوسته نباشد.

۲) تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و خط قائمی بر نمودار f در نقطه به طول $x=a$ مماس شود (نمودار $y=\sqrt[3]{x}$ در $x=0$)

۳) تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و نمودار تابع f در نقطه به طول $x=a$ خط مماسی نداشته باشد (در این صورت نمودار تابع f در نقطه به طول $x=a$ گوشه دارد.) نمودار $y=|x|$ در $x=0$ و نمودار تابع $f(x)=|1-x^2|$ در نقاط $x=1$ و $x=-1$)

روش برهان خلف:

یکی از روش های اثبات قضیه شرطی $p\to q$ روش برهان خلف است. در مبانی ریاضی قضیه زیر به نام برهان خلف در بخش گزاره ها وجود دارد.

قضیه (برهان خلف) فرض کنید که p و q دو گزاره دلخواه باشد در این صورت $(p\to q)\equiv[(p\wedge\sim q)\to(q\wedge\sim q)]$

در روش برهان خلف برای اثبات قضیه شرطی $p\to q$ به صورت زیر عمل می‌کنیم

فرض کنیم که p برقرار باشد و فرض کنیم که $\sim q$ هم برقرار باشد (یعنی $p\wedge\sim q$ درست باشد) و با تعداد محاسبات و عملیات های منطقی به درستی q و نادرستی q می‌رسیم (یعنی $q\wedge\sim q$ درست باشد) که یک تناقض است بنابراین طبق قضیه (برهان خلف) قضیه شرطی $p\to q$ برقرار است. [درست بودن $\sim q$ همان فرض خلف است]

مثال ۴: در صفحه قبل در مثال ۱ ثابت کردیم که اگر $x^2-3x+2<0$ آنگاه $x>0$ حال این مطلب را به روش برهان خلف ثابت می‌کنیم. فرض کنید که $x^2-3x+2<0$ و $x\leq 0$ (فرض خلف) در این صورت $-3x\geq 0$ و بنابراین $3x-2\leq -2$ حال از نامساوی $x^2-3x+2<0$ می‌توان نوشت که $x^2<3x-2$ و طبق نامساوی $3x-2\leq -2$ می‌توان نوشت که $x^2<-2<0$ یعنی $x^2<0$ که یک تناقض است پس فرض خلف باطل و حکم یعنی اگر $x^2-3x+2<0$ آنگاه $x>0$ درست است.

توجه: در روش برهان خلف در برخی مواقع به یک تناقض می‌رسیم که این تناقض با اصل و قضیه و یک حکم ریاضی است که قبلاً اثبات شده است. (به مثال ۵ دقت کنید)

اصل ارشمیدس: برای هر عدد مثبت مانند a (یعنی $a>0$) یک عدد طبیعی به اندازه کافی بزرگ مانند n وجود دارد به طوری که $\frac{1}{n}<a$ (یا $na>1$).

مثال ۵: نشان دهید که $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(0,\frac{1}{n})=\phi$.

حل: (به کمک روش برهان خلف) فرض خلف فرض کنید که $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(0,\frac{1}{n})\neq\phi$ پس $\exists a\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(0,\frac{1}{n})$

طبق تعریف اشتراک که برای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم $a\in(0,\frac{1}{n})$ [یعنی $0<a<\frac{1}{n}$ برای هر $n\in\mathbb{N}$]

پس برای هر $n\in\mathbb{N}$، $a<\frac{1}{n}$ که با اصل ارشمیدس در تناقض است پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

توجه: در مبانی فصل مجموعه متناهی و نامتناهی دیده‌ایم که مجموعه $\mathbb{R}$ ناشمارا است زیرا بازه $(0,1)$ ناشمارا است و $\mathbb{R} \sim (0,1)$

مثال ۶: نشان دهید که مجموعه اعداد اصم ناشمارا است.

حل: فرض خلف: فرض کنید که مجموعه اعداد اصم شمارا باشد. می‌دانیم که مجموعه اعداد اصم $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ است. حال چون $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R}-\mathbb{Q})$ و می‌دانیم که $\mathbb{Q}$ مجموعه شمارای نامتناهی است و با فرض $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ شمارا، بدیهی است که $\mathbb{R}$ هم مجموعه شمارای نامتناهی می‌شود [زیرا اجتماع دو مجموعه شمارا، شمارا است] که یک تناقض است پس فرض خلف باطل و مجموعه اعداد اصم ناشمارا است.

روش استدلال قیاسی (استدلال استنتاجی): از این روش برای اثبات قضیه‌های شرطی و قضیه‌های دوشرطی استفاده می‌کنیم. در این روش برای اثبات یک قضیه تعدادی دلیل و استدلال درست می‌آوریم که این دلیل‌ها و استدلال‌ها می‌توانند به تعاریف و قضیه‌های اثبات شده، استفاده شده باشند تا درستی قضیه، اثبات شود.

مثال ۷: **مثال زیر را با یک استدلال قیاسی حل کنید.** اگر $x^2-3x+2<0$ آنگاه $x>0$

حل: فرض کنید که $x^2-3x+2<0$ چون $x^2 \geq 0$ پس $x^2+2 \geq 2$ از طرفی از $x^2-3x+2<0$ می‌توان نتیجه گرفت که $3x > x^2+2$ بنابراین $3x>2$ پس $x>\frac{2}{3}$ بنابراین $x>0$

مثال ۸: قضیه عکس نقیض $(p\to q) \equiv (\sim q \to \sim p)$ را ثابت کنید.

حل: می‌دانیم که $(p\to q) \equiv q \vee \sim p$ بنابراین:

$$(\sim q \to \sim p) \overset{\text{تعریف}}{\equiv} \sim p \vee \sim(\sim q) \equiv \sim p \vee q \equiv q\vee\sim p \equiv (p\to q)$$

مثال ۸: فرض کنید که A و B دو زیرمجموعه U باشند. نشان دهید که $A\subseteq B \iff B'\subseteq A'$ که در آن $A' = U-A$ متمم مجموعه A نسبت به مجموعه U است.

اثبات: روش اول: $(A\subseteq B)\equiv(x\in A \to x\in B) \overset{\text{عکس نقیض}}{\equiv} (\sim(x\in B)\to\sim(x\in A))$

$\equiv (x\in B' \to x\in A') \equiv B'\subseteq A'$

روش دوم: چون $(A\subseteq B)\equiv(B'\subseteq A')$ را می‌توان به صورت دو گزاره شرطی $(A\subseteq B)\Rightarrow(B'\subseteq A')$ و $(B'\subseteq A')\Rightarrow(A\subseteq B)$ نوشت. این دو گزاره شرطی (استلزام) را جداگانه ثابت می‌کنیم.

اثبات $(A\subseteq B)\Rightarrow(B'\subseteq A')$. فرض کنید که $A\subseteq B$ نشان می‌دهیم که $B'\subseteq A'$.

فرض کنید که $x\in B'$ دلخواه باشد پس $x\notin B$ حال چون $A\subseteq B$ پس $x\notin A$ پس $x\in A'$ یعنی $B'\subseteq A'$ است.

اثبات $(B'\subseteq A')\Rightarrow(A\subseteq B)$: فرض کنید که $B'\subseteq A'$ نشان می‌دهیم که $A\subseteq B$.

فرض کنید که $x\in A$ دلخواه باشد پس $x\notin A'$ چون $B'\subseteq A'$ پس $x\notin B'$ پس $x\in B$ یعنی $A\subseteq B$. حال چون هر دو گزاره $(A\subseteq B)\Rightarrow(B'\subseteq A')$ و $(B'\subseteq A')\Rightarrow(A\subseteq B)$ هم‌ارزند پس $(A\subseteq B)\equiv(B'\subseteq A')$ برقرار است.

توجه: در جبر خطی اگر V و W دو فضای برداری روی میدان F باشند و $T: V \longrightarrow W$ یک تبدیل خطی باشد آنگاه می‌توان مثال زیر را ثابت کرد که در آن $KerT = \{\alpha \in V \mid T(\alpha)=0\}$

مثال ۹: نشان دهید که تبدیل خطی $T: V \to W$ یک به یک است اگر و فقط اگر $\{0\} = KerT$.

اثبات: فرض کنید که $T: V \to W$ یک تبدیل خطی یک به یک باشد یعنی $T(\alpha) = T(\beta) \Longrightarrow \alpha = \beta$ نشان می‌دهیم که $KerT = \{0\}$:

$\alpha \in KerT \Rightarrow T(\alpha) = 0 = T(0) \Longrightarrow$ (T یک به یک است) $\alpha = 0 \Rightarrow KerT = \{0\}$

[در هر تبدیل خطی مانند T همواره $T(0) = 0$]

برعکس فرض کنید که $KerT = \{0\}$. اگر $T(\alpha) = T(\beta)$ آنگاه $T(\alpha) - T(\beta) = 0$ بنابراین $T(\alpha-\beta) = 0$ پس $\alpha-\beta \in KerT$ پس $\alpha-\beta = 0$ پس $\alpha = \beta$ یعنی T یک به یک است.

توجه: مثال ۹ و روش اثبات آن هم در جبر برای همومورفیسم‌های گروه و همومورفیسم‌های حلقه برقرار است.

اگر $(G, *)$ و $(H, *')$ دو گروه باشند و $\phi: G \longrightarrow H$ یک همومورفیسم باشد یعنی
$\forall a, b \in G: \phi(a*b) = \phi(a) *' \phi(b)$
آنگاه همومورفیسم ϕ یک به یک است اگر و فقط اگر $Ker\phi = \{e\}$ که در آن e عضو خنثی گروه $(G, *)$ است. (تمرین ۱)

مثال ۱۰: اگر A و B و C سه مجموعه باشند ثابت کنید که $[A \times (B-C)] = [(A \times B) - (A \times C)]$

اثبات: $\forall (a,x) \in [A \times (B-C)] \equiv a \in A \wedge x \in (B-C) \equiv a \in A \wedge [x \in B \wedge x \notin C] \equiv (a \in A \wedge a \in A) \wedge (x \in B \wedge x \notin C) \equiv (a \in A \wedge x \in B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C) \equiv$
$\equiv$ (خودتوانی) $[(a,x) \in A \times B \wedge (a,x) \notin A \times C] \equiv (a,x) \in [A \times B - A \times C]$

روش به انتفای مقدم: در مبانی ریاضی دیدیم که اگر در گزاره شرطی $p \longrightarrow q$ اگر مقدم یعنی p نادرست باشد کل گزاره شرطی درست است به دیگر گزاره شرطی $p \to q$ به انتفای مقدم درست است و برای درستی قضیه‌های شرطی $p \to q$ می‌توان از روش به انتفای مقدم استفاده کرد (مثال زیر)

مثال ۱۱: برای مجموعه دلخواه A نشان دهید که $\phi \subseteq A$.

اثبات: به روش انتفای مقدم: می‌دانیم که $(\phi \subseteq A) \equiv (x \in \phi \to x \in A)$ چون $x \in \phi$ مقدم گزاره شرطی $[x \in \phi \to x \in A]$ نادرست است پس کل گزاره شرطی $[x \in \phi \to x \in A]$ درست است پس $\phi \subseteq A$.

مثال ۱۲: فرض کنید که $\{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ خانواده تهی از مجموعه‌ها باشد یعنی $\Gamma = \phi$ ثابت کنید که

ثابت کنید که الف) $\bigcap_{\gamma\in\phi} A_\gamma = U$ ب) $\bigcup_{\gamma\in\phi} A_\gamma = \phi$. (U مجموعه مرجع است)

اثبات الف) (با انتفای مقدم) ثابت می‌کنیم که برای هر x در U آنگاه $x \in \bigcap_{\gamma\in\phi} A_\gamma$ از طرفی هم می‌دانیم که ① $\bigcap_{\gamma\in\phi} A_\gamma \subseteq U$

$$x \in \bigcap_{\gamma\in\phi} A_\gamma \equiv (x \in A_\gamma \;;\; \forall \gamma\in\phi) \equiv (\underbrace{\gamma\in\phi}_{\text{نادرست}} \longrightarrow x \in A_\gamma)$$

چون گزاره $[\gamma\in\phi \rightarrow x\in A_\gamma]$ با انتفای مقدم درست است پس $x \in \bigcap_{\gamma\in\phi} A_\gamma$ یعنی ② $U \subseteq \bigcap_{\gamma\in\phi} A_\gamma$

پس ① و ② می‌گویند که $\bigcap_{\gamma\in\phi} A_\gamma = U$

ب) (تمرین ۲)

تبصره: برخی از قضیه‌ها و احکام ریاضی و مسائل ریاضی با چندین روش حل می‌شوند. در مثال او ۶ و ۷ دیدیم که اگر $x^2 - 3x + 2 > 0$ آنگاه $x < 0$ با سه روش حل شد.

مثال ۱۳: ثابت کنید که برای هر عدد حقیقی x اگر $|x| < 1$ آنگاه $x < 1$.

اثبات روش اول (استدلال قیاسی) طبق تعریف $|x|$ داریم $-1 \leq x \leq 1 \Longleftrightarrow |x| \leq 1$ همچنین $|x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$ بنابراین اگر $|x| < 1$ آنگاه $-1 < x < 1$ پس $x < 1$.

روش دوم: (روش برهان خلف) فرض کنید که $|x| < 1$ و (فرض خلف) $x \geq 1$ باشد پس $x > 0$ و بنابراین طبق تعریف $|x|$، $|x| = x$ و چون $x \geq 1$ فرض شده است نتیجه می‌شود $|x| \geq 1$. که متناقض با $|x| < 1$ است، پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

مثال ۱۴: برای هر عدد طبیعی n نشان دهید که $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

حل به روش ~~...~~ فرض کنید که $S = 1+2+3+\cdots+n$ پس می‌توان S را به صورت $S = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1$ هم نوشت بنابراین

$S = 1+2+3+\cdots+n$ و $S = n+(n-1)+\cdots+2+1$

با جمع کردن داریم

$$2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)}_{n\text{ تا}} = n(n+1)$$

بنابراین $S = \frac{n(n+1)}{2}$ یعنی $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

توجه: این مثال را در صفحه بعد با روش استقرای ریاضی هم حل می‌کنیم.

منظور حکم همچنین ثابت شد که

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

روش استقرای ریاضی:

اصل استقرای ریاضی: اگر $P(n)$ یک حکم مربوط به عدد طبیعی n باشد بطوریکه

۱) $P(1)$ درست باشد و (۲) برای هر عدد طبیعی K؛ $P(K) \Longrightarrow P(K+1)$

(یعنی از درستی $P(K)$ درستی $P(K+1)$ نتیجه شود)

آنگاه $P(n)$ برای هر عدد طبیعی n درست است

در این اصل به درستی $P(1)$ شروع استقرای ریاضی می گوئیم، همچنین فرض درستی $P(K)$ را فرض استقرای ریاضی می نامیم و درستی $P(K+1)$ که باید ثابت شود را حکم استقرای ریاضی می نامیم

پس روش استقرای ریاضی بصورت زیر است:

در مرحله اول یک حکم ریاضی روی اعداد طبیعی داده می شود که باید درستی آن را تحقیق کنیم. اصل استقرای ریاضی می گوید باید درستی $P(1)$ را بررسی کنیم و همچنین فرض کنیم که $P(K)$ برای هر عدد طبیعی K کوچکتر از n درست است اگر بتوانیم ثابت کنیم که $P(K+1)$ هم درست است بنابراین $P(n)$ برای هر عدد طبیعی درست است

توجه: در اثبات درست بودن $P(K+1)$ می توان از فرض استقرای ریاضی یعنی درستی $P(K)$ و همچنین هر حکمی که درستی آن قبلاً ثابت شده ~~است~~ استفاده کرد

مثال ۱۵: به کمک روش استقرای ریاضی ثابت کنید که $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

اثبات: قرار می دهیم $P(n):\ 1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

شروع استقرای ریاضی: درستی $P(1)$: $P(1):\ 1=\frac{1(1+1)}{2}=1$

فرض استقرای ریاضی: فرض کنیم که $P(K)$ برای هر عدد طبیعی K کوچکتر از n درست باشد یعنی

$$P(K):\ 1+2+\cdots+K=\frac{K(K+1)}{2}$$

حال به اثبات حکم استقرای ریاضی یعنی $P(K+1)$ می پردازیم:

$$\underbrace{1+2+3+\cdots+(K)}_{\text{طبق فرض}}+(K+1)=\frac{K(K+1)}{2}+(K+1)=\frac{K(K+1)+2(K+1)}{2}=$$

$$=\frac{(K+1)(K+2)}{2}$$

بنابراین حکم $P(n)$ برای هر عدد طبیعی n درست است (طبق اصل استقرای ریاضی)

تمرین

۱- اگر $\phi:(G,*)\to(H,*')$ یک همومورفیسم از گروه $(G,*)$ به گروه $(H,*')$ باشد نشان دهید که همومورفیسم ϕ یک‌به‌یک است اگر و فقط اگر $\ker\phi=\{e\}$ ، که در آن $\ker\phi$ (هسته ϕ) به صورت زیر تعریف می‌شود
$$\ker\phi=\{a\in G \mid \phi(a)=e'\}$$
e' عضو خنثی گروه $(H,*')$ است.

۲- قسمت (ب) مثال ۱۲ را ثابت کنید.

۳- اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند الف) ثابت کنید که $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$

ب) آیا تساوی $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$ درست است دلیل بیاورید

$P(A)$ مجموعه توانی A یعنی ~~مجموعه~~ تمام زیرمجموعه‌های A.

۴- نشان دهید که $A-B=A\cap B'$ که در آن A و B دو مجموعه دلخواه هستند ($A,B\subseteq U$)

۵- اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند ثابت کنید که

الف) $(A\cap B)'=A'\cup B'$ ب) $(A\cup B)'=A'\cap B'$

۶- اگر $f:X\to Y$ یک تابع باشد ثابت کنید که

الف) اگر $A\subseteq B\subseteq X$ آنگاه $f(A)\subseteq f(B)$

ب) اگر $C\subseteq D\subseteq Y$ آنگاه $f^{-1}(C)\subseteq f^{-1}(D)$.

۷- فرض کنید که $g:X\to Y$ یک تناظر یک‌به‌یک باشد (g تابع یک‌به‌یک و پوشا باشد) ثابت کنید که اگر مجموعه X نامتناهی باشد آنگاه مجموعه Y هم نامتناهی است

۸- برای هر عدد طبیعی n نشان دهید که $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

۹- ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n، $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

۱۰- فرض کنید که A یک مجموعه n عضوی باشد الف) ثابت کنید که تعداد زیرمجموعه‌های زوج عضوی از A برابر 2^{n-1} است. ب) ثابت کنید که تعداد زیرمجموعه‌های فرد عضوی از A برابر با 2^{n-1} است.

۱۱- اگر A یک مجموعه n عضوی باشد ثابت کنید که تعداد زیرمجموعه r عضوی از A برابر با $C(n,r)$ است

۱۲- نشان دهید که تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی برابر با 2^n است

۱۳- عکس مثال ۲ را ثابت کنید: [اگر $f:X\to Y$ تابعی یک‌به‌یک باشد آنگاه $f(A-B)=f(A)-f(B)$ $\forall A,B\subseteq X$]

۱۴- آیا حکم زیر درست است؟ اگر درست است ثابت کنید در غیر این صورت با مثال نقض آن را رد کنید
برای هر عدد طبیعی n عدد $2^{(2^n)} + 1$ یک عدد اول است

۱۵- درستی و یا نادرستی حکم $41 + 41n + n^2$ برای هر عدد طبیعی یک عدد اول است ملاحظه و بررسی کنید.

۱۶- ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n

$$C(n,0) + C(n,1) + C(n,2) + \cdots + C(n,n) = 2^n$$

۱۷- ثابت کنید که تابع $f: X \longrightarrow Y$ یک به یک است اگر و فقط اگر برای تمام زیر مجموعه‌های X مانند A و B

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

حل مسئله و روشهای حل مسئله

در بخش قبل با تعدادی از روشهای اثبات احکام ریاضی از جمله روشهای استدلال قیاسی - عکس نقیض
برهان خلف - روش استقرایی - روش به انتفای مقدم - مسئله را داشته فرض کردن - بررسی تمام حالات ممکنه و
روش استفاده از مسائل دیگر و مرتبط و مثال نقض (برای مردود کردن یک حکم ریاضی) آشنا شدیم و به کمک این روشها
تعدادی از احکام ریاضی که برخی از آنها مسئله بودند آشنا شدیم.

در این بخش با راهبردهای حل یک مسئله که کار از جورج پولیا است آشنا می شویم و با کمک آنها تعدادی از
مسائل را حل می کنیم. جورج پولیا برای حل یک مسئله چهار مرحله را پیشنهاد می کند که این چهار مرحله به صورت زیر
است:

مرحله اول فهمیدن صورت مسئله - مرحله دوم (انتخاب رهیافت (انتخاب نقشه)

مرحله سوم، اجرای رهیافت (یا اجرای نقشه) - مرحله چهارم: بازبینی و تعمیم

مرحله اول: فهمیدن صورت مسئله: برای حل یک مسئله باید شناخت کامل از صورت مسئله داشته باشیم و با واژه های
که در صورت مسئله به کار رفته است آشنا باشیم و تعاریف این واژه ها و اگر نیاز به محاسبه باشد معادل آنها و محاسبه آنها
را بدانیم. همچنین بدانیم که مفروضات مسئله چیست و چه چیزی از ما خواسته شده است (مسئله را بدانیم)
و اگر بتوان معلومات (فرض ها و شرطها) و مجهولات را فرمول بندی کرد آنها را فرمول بندی کنیم و به هم ارتباط دهیم

مرحله دوم: برای حل مسئله رهیافتی مناسب که قابل اجرا است را انتخاب کنیم. انتخاب رهیافت (طرح نقشه) مهمترین
قسمت حل مسئله است. این رهیافت ها می توانند به صورت زیر باشند.

رهیافت رسم شکل - رهیافت حل معادله (نمادین یعنی به صورت معادله درآوردن) - رهیافت آزمایش و خطا -
رهیافت الگویابی - رهیافت جدول نظام دار - رهیافت زیرمسئله - رهیافت مسئله ساده تر - رهیافت مسئله کلی و مرتبط
رهیافت از آخر به اول آمدن (مسئله را داشته فرض کردن)

هر یک از این رهیافت ها در ادامه شرح داده می شود.

مرحله سوم: اجرای رهیافت (اجرای نقشه است) پیاده کردن نقشه (اجرای نقشه) در واقع حل کردن و شرح دادن حل مسئله است

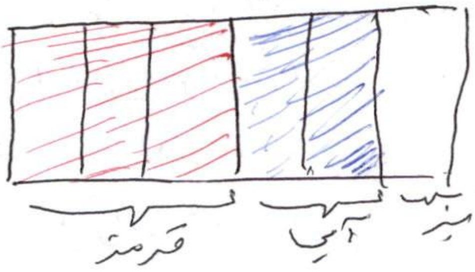
مرحله چهارم: بازبینی و تعمیم مسئله: یعنی چک کردن مراحل حل که اشتباهی صورت نگرفته باشد و جواب بدست آمده درست باشد
و سپس تعمیم دادن آن به مسائل بزرگتر و کلی تر

حل مسئله به کمک رهیافت رسم شکل: برخی از مسائل از روی رسم یک شکل مناسب و دقیق قابل حل هستند.
همچنین رسم شکل در فهم صورت مسئله و شکل گیری طرح رهیافت های دیگر از اهمیت خاصی برخوردار است.
ولی در رهیافت رسم شکل، فقط از رسم شکل استفاده می کنیم. تعداد زیادی از مسئله های کتاب ریاضی دبستان فقط با رسم شکل
قابل حل هستند بخصوص مسائلی که در آن نیاز به جمع چیزی (جمع و تفریق در عدد صحیح - جمع و تفریق دو عدد گویا) است
همچنین در مقایسه نسبت های مثلثاتی (زوایای مثلثاتی) رسم شکل نقش اساسی دارد

مثال) در کیسه‌ای نصف مهره‌ها قرمز و $\frac13$ مهره‌ها آبی است و باقی مهره‌ها سبز هستند چه کسری از مهره‌ها سبز هستند

حل) (رهیافت رسم شکل) مرحله اول فهمیدن صورت مسئله: شناخت کسرها و اینکه در کیسه فقط مهره‌ها از سه رنگ هستند

مرحله دوم رهیافت هم رسم شکل است مرحله سوم اجرای رهیافت یک مستطیل رسم می‌کنیم و به شش قسمت تقسیم می‌کنیم و نصف مستطیل (۳ قسمت) قرمز می‌کنیم و $\frac13$ مستطیل را رنگ آبی می‌کنیم (یعنی ۲ قسمت) و قسمت‌های باقی مانده را سبز می‌کنیم



از روی شکل واضح است که $\frac16$ از مهره‌ها سبز هستند

این مثال را می‌توان با روش معادله هم حل کرد (که طرح رهیافت آن تشکیل معادله است. یعنی

$$1=\frac12+\frac13+x \Rightarrow$$
$$x=1-\frac56=\frac66-\frac56=\frac16$$

مرحله چهارم: بازبینی است که چون شکل درست رسم شده است اجرای طرح نقشه مشکلی ندارد و برای تعمیم می‌توان به جای کسرها از تعداد مهره‌ها استفاده کرد. یا تعداد رنگ مهره‌ها می‌توان اضافه کرد و مسئله‌های جدیدی ساخت.

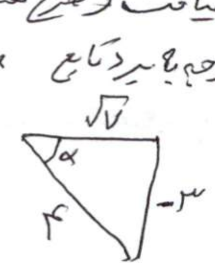
مثال ۲: مطلوب است محاسبه $\sec(\sin^{-1}(-\frac34))$.

حل: فرض کنید که $\alpha=\sin^{-1}(-\frac34)$ بنابراین $\sin\alpha=-\frac34$ برای محاسبه $\sec(\alpha)$ از رهیافت رسم شکل استفاده می‌کنیم

فهمیدن صورت مسئله: باید با توابع مثلثاتی و معکوس مثلثاتی آشنا باشیم و مقادیر عددی این توابع را بتوانیم حساب کنیم

رهیافت (طرح نقشه) رسم شکل و اجرای رهیافت به صورت زیر است:

با توجه به برد تابع $\sin^{-1}x$ که بازه $[-\frac\pi2,\frac\pi2]$ است و چون $\sin\alpha=-\frac34$ پس $-\frac\pi2<\alpha<0$.



طبق شکل مثلث $\sec\alpha=\frac{4}{\sqrt7}$ بنابراین $\sec(\sin^{-1}(-\frac34))=\frac{4}{\sqrt7}=\frac{4\sqrt7}{7}$

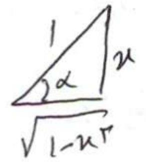
بازبینی و تعمیم: می‌توان $\cos\alpha$ و $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ و $\csc\alpha$ را هم حساب کرد زیرا

$\cos\alpha=\frac{\sqrt7}{4}$, $\tan\alpha=\frac{-3}{\sqrt7}$ و $\cot\alpha=-\frac{\sqrt7}{3}$ و $\csc\alpha=-\frac43$

مثال ۳: ثابت کنید که $\cos(\sin^{-1}x)=\sqrt{1-x^2}$

حل: همانند مثال قبل از رهیافت رسم شکل کمک می‌گیریم و فهمیدن صورت مسئله و اجرای رهیافت و بازبینی همانند مثال قبل است

فرض کنید که $\alpha=\sin^{-1}x$ بنابراین $\sin\alpha=x$ با رسم مثلث مقابل داریم



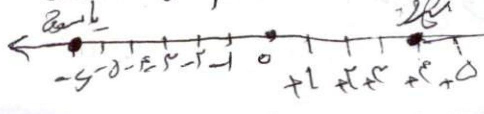
$$\cos(\sin^{-1}x)=\cos(\alpha)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{1}=\sqrt{1-x^2}$$

و همانند مثال قبل

$\csc x=\frac1x$ و $\tan\alpha=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\cot\alpha=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $\sec\alpha=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

مثال ۴: دمای شهر یاسوج ۶ درجه زیر صفر است و دمای هوای شهر شیراز ۱۰ درجه گرمتر از دمای شهر یاسوج است دمای هوای شهر شیراز چند درجه است.

حل: فهمیدن مسئله: باید با جمع جبری اعداد صحیح و محور اعداد صحیح آشنا باشیم و دمای شهر یاسوج معلوم است و دمای شهر شیراز مجهول است. رهیافت رسم شکل، اجرای نقشه (رهیافت) کشیدن محور اعداد و پیدا کردن دمای شهر شیراز:



از روی محور اعداد رسم شده از عدد ۶- (دمای شهر یاسوج) به اندازه ۱۰ واحد به سمت راست می رویم (چون گرمتر است اگر سردتر بود به سمت چپ می رفتیم) و به دمای ۴+ که دمای شهر شیراز است می رسیم.

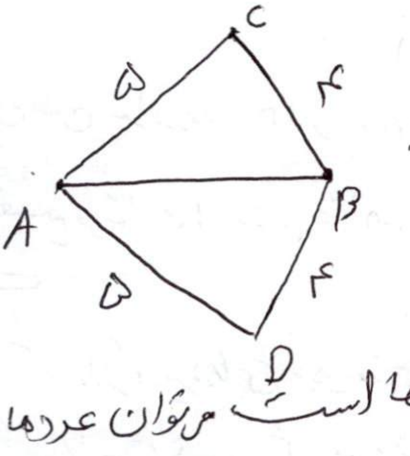
از روش جبری هم به صورت $-6+(+10)=+4$ است.

بازبینی و تعمیم: بررسی کردن رسم محور و اعداد تعیین شده روی محور به خصوص اعداد ۶- و ۴+.

برای تعمیم هم می توان از نام شهرهای دیگر و یا دماهای متفاوت مسئله جدید طرح کرد و همچنین می توان از طبقات یک ساختمان چندین طبقه برای طرح مسئله جدید کمک گرفت.

مثال ۵: دو نقطه A و B را به فاصله ۵ سانتی متر از هم انتخاب کنید. نقاطی را معین کنید که از A به اندازه ۴ سانتی متر و از B به اندازه ۵ سانتی متر فاصله داشته باشد.

حل: (راهبرد رسم شکل) در مرحله اول فهمیدن مسئله است در مرحله دوم انتخاب راهبرد رسم شکل است، اجرای نقشه می توان از خط کش و پرگار کمک گرفت



یک دایره به شعاع ۴ به مرکز A و دیگری به شعاع ۵ به مرکز B رسم می کنیم، و محل تلاقی این دو دایره نقاط C و D هستند و این دو نقطه جواب مسئله است.

بازبینی و تعمیم: برای بازبینی چک کردن فاصله ها و رسم دایره ها است می توان عددها را عوض کرد و نقاط دیگری را در مسائل جدید خواست.

۲- روش معادله (روش نمادین)

یکی از راهبردها برای حل مسئله روش نوشتن معادله و یا روش نمادگذاری است که به روش نمادین معروف شده است در این روش برای حل یک مسئله می توان با توجه به مفروضات داده شده، و مجهولات خواسته شده یک یا چند معادله نوشت و از حل این معادلات جواب های مسئله را یافت. در برخی مواقع به جای معادله می توان یک تابع یک متغیره یا تابع دو متغیره همراه با شرایط داده شده برای یک مسئله نوشت و این توابع را تحت شرایط خواسته شده بهینه (اکسترمم مطلق) کرد یعنی اگر هدف سود است آن را ماکسیمم و اگر هدف کم کردن زیان است آن را مینیمم کرد، که بعداً از چند مثال به آن می پردازیم.

مثال ۶: مجموع، نصف و ربع چه عددی ۳۶ است؟

حل (راهبرد تشکیل معادله) بعد از فهمیدن مسئله (شناخت نصف یک عدد و ربع یک عدد یعنی کسرهای $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{4}$) برای اجرای راهبرد چنین داریم. فرض کنیم که عدد مورد نظر x باشد طبق صورت مسئله

باید معادله $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x = 36$ را حل کنیم که حل آن به صورت زیر است

$$\frac{2x+x}{4} = 36 \Rightarrow 3x = 4\times 36 \Rightarrow x = \frac{4\times 36}{3} = 4\times 12 = 48$$

پس عدد خواسته شده ۴۸ می‌باشد. در بازبینی $\frac{1}{2}(48) = 24$ و $\frac{1}{4}(48) = 12$ پس $12+24=36$ است

برای تعمیم: می‌توان به جای نصف از ثلث و به جای ربع می‌توان از خمس استفاده کرد و مسائل جدید ساخت.

این مثال را می‌توان از راهبرد آزمایش و خطا حل کرد

مثال ۷: مجموع سن علی و برادرش ۳۶ سال است. اگر علی ۸ سال از برادرش بزرگتر باشد، سن هر کدام چقدر است.

حل (راهبرد تشکیل معادله) بعد از فهمیدن صورت مسئله و انتخاب راهبرد این راهبرد را به صورت زیر پیاده می‌کنیم. سن برادر علی را به عنوان x در نظر می‌گیریم و بنابراین سن علی $8+x$ است و بنابراین $(8+x)+x=36$

$$(8+x)+x=36 \Rightarrow 2x+8=36 \Rightarrow 2x=36-8=28 \Rightarrow \boxed{x=14}$$

بنابراین سن برادر علی ۱۴ و سن علی $14+8=22$ سال است.

برای تعمیم می‌توان از سن خواهر، پدر و مادر و همچنین عددهای دیگری کمک گرفت و مسئله جدید ساخت.

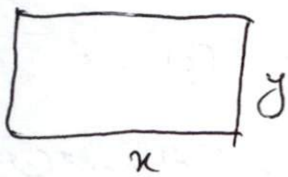
این مثال را می‌توان از راهبرد آزمایش و خطا حل کرد.

تبصره: یکی از کاربردهای راهبرد نمادین (تشکیل معادله) در حل مسائل بهینه‌سازی است. در بهینه‌سازی در مسائل مورد نظر که در آن باید ماکسیمم (تولید، مساحت، حجم و ...) یا مینیمم (فاصله، طول، هزینه و ...) یک کمیت را تعیین کنیم، با توجه به مفروضات مسئله یک تابع یک متغیره $y=f(x)$ می‌سازیم و دامنه آن از روی شرایط داده شده مشخص می‌باشد. اگر دامنه آن بازه بسته $I=[a,b]$ باشد و تابع $f(x)$ هر روی بازه بسته I پیوسته باشد آنگاه طبق قضیه اکسترمم مطلق تابع $f(x)$ یک مقدار ماکسیمم مطلق M و یک مقدار مینیمم مطلق m روی I اختیار می‌کند و این مقادیر ماکسیمم و مینیمم تابع f در بین مقادیر $f(a)$ و $f(b)$ و $f(c_1)$ و $f(c_2)$ و ... قرار دارد که c_1 و c_2 و ... نقاط بحرانی تابع f هستند یعنی ریشه‌های معادله $f'(x)=0$ و یا نقاطی است که $f'(x)$ در آن تعریف نشده‌اند.

توجه: در تمرین‌ها قضیه اکسترمم مطلق روی بازه‌های باز و نیم‌باز هم آمده است.

مثال ۸: مزرعه‌داری ۸۰ متر حصار دارد و می‌خواهد دور یک مزرعه مستطیلی حصار بکشد. بیشترین مساحت مستطیلی که می‌تواند حصار بکشد چقدر است.

حل: فهمیدن مسئله: با ۸۰ متر حصار بیشترین مساحت مستطیلی که می‌توان دور آن حصار کشید ما باید



پیدا کنید. (رهیافت تشکیل تابع و بهینه سازی) اگر A مساحت مستطیل مورد نظر باشد، مساحت آن برابر $x \cdot y$ است پس مساحت $A = x \cdot y$.

از طرفی محیط مستطیل برابر با $2(x+y)$ است که برابر با ۸۰۰ متر قرار می‌دهیم، پس $2x+2y=800$

یا $x+y=400$ شرط داده شده می‌باشد.

برای اجرای رهیافت تابع $f(x)$ را به صورت زیر تعیین می‌کنیم.

$$x+y=400 \Rightarrow y=400-x \Rightarrow f(x)=xy=x(400-x)=400x-x^2$$

پس تابع $f(x)=400x-x^2$ و بازه پیوسته $I=[0,400]$ است زیرا اگر $x=0$ یا $x=400$ باشد مستطیل تشکیل نمی‌شود و اگر $0<x<400$ باشد مستطیل تشکیل می‌شود.

حال نقطه بحرانی تابع را می‌یابیم

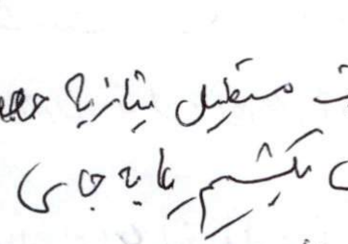
$$f'(x)=400-2x=0 \Rightarrow x=200 \Rightarrow y=400-200=200$$

حال چون $f(0)=0$, $f(400)=0$ و $f(200)=200\times 200=40000$

پس بیشترین مساحت مستطیل زمانی است که $x=200$ و $y=200$ و مساحت مستطیل برابر با ۴۰۰۰۰ متر مربع است.

بازرسی همان چک کردن راه حل است و برای تعمیم می‌توان یک طرف مستطیل نیاز به حصار نداشته باشد (کنار رودخانه باشد) یا بخواهیم دو دور حصار دور زمین بکشیم یا به جای مستطیل از مربع یا مثلث متساوی الاضلاع استفاده کنیم و پس می‌توان از روی این مسئله تعداد زیادی مسئله جدید طرح کرد.

مثال ۶: می‌خواهیم یک جعبه‌ای مربعی شکل (مکعب) از روی ورقه فلزی مربعی به طول ضلع ۱۲ متر بسازیم. برای این کار لازم است که از چهار گوشه آن چهار مربع کوچک ببریم و لبه‌های ورقه را تا بزنیم تا جعبه سرباز درست شود. ماکسیمم حجم جعبه‌ای که از این طریق ساخته می‌شود چقدر است؟



حل (رهیافت تشکیل معادله و بهینه سازی) اگر x ضلع مربعی باشد که از چهار گوشه ورقه فلزی می‌بریم در این صورت

$$\text{حجم جعبه} = (12-2x)^2 x = 4x(6-x)^2$$

بعد از فهمیدن مسئله از روی برش و کشیدن شکل حجم جعبه $f(x)=4x(6-x)^2$ بدست می‌آوریم

بازه $[0, 6] = I$ است و تابع $f(x)$ روی این بازه پیوسته است بدیهی است که $f(0) = 0$ و $f(6) = 0$ یعنی اگر $x = 0$ و $x = 6$ باشد جعبه‌ای تشکیل نمی‌گردد. پس $0 < x < 6$.

طبق قضیه اکسترمم مطلق، نقاط بحرانی تابع $f(x)$ را می‌یابیم:

$$f'(x) = 4(6-x)^2 - 2(4x)(6-x) = 4[6-x][6-x-2x] = 0 \begin{cases} x = 6 \\ x = 2 \end{cases}$$

پس $f(0) = f(6) = 0$ و $f(2) = 4 \times 2(6-2)^2 = 128$ مترمکعب حجم بیشترین جعبه خواهد بود.

برای بازبینی با این راه حل را بررسی کنیم و برای تعمیم می‌توان جعبه‌ای در نظر گرفت که سرآن بسته باشد یا جعبه به صورت مکعب مستطیل باشد و به این طریق می‌توان مسائل جدیدی را ساخت.

۳ـ رهیافت (آزمایش و خطا (روش حدسی)) در این رهیافت می‌توان با حدس زدن و امتحان کردن آن به جواب مورد نظر مسئله رسید.

مثال های ۶ و ۷ را می‌توان با رهیافت آزمایش و خطا حل کرد.

مثال ۱۰: مثال ۷ را با رهیافت آزمایش و خطا حل کنید. چون مجموع سن علی و برادرش ۳۶ سال است و سن علی ۸ سال از سن برادرش کمتر است در جدول زیر برای سن علی چند حدس می‌زنیم

سن علی	۱۰	۱۲	۱۴
سن برادرش	$26 \neq 10+8$	$24 \neq 12+8$	$22 = 14+8$
مجموع سن هر دو	۳۶	۳۶	۳۶

طبق جدول مقابل سن علی ۱۴ و سن برادرش ۲۲ سال است.

مثال ۱۱: مثال ۶ را با رهیافت آزمایش و خطا حل کنید.

عددی می‌خواهیم که مجموع نصف آن عدد با ربع آن برابر با ۳۶ شود. در جدول زیر برای عدد خواسته شده چند حدس می‌زنیم عددهایی که حدس می‌زنیم باید بر ۴ قابل تقسیم باشد پس

عدد	۶۴	۶۰	۵۲	۴۸
$\frac{1}{2}$ عدد	۳۲	۳۰	۲۶	۲۴
$\frac{1}{4}$ عدد	۱۶	۱۵	۱۳	۱۲
مجموع	۴۸ نادرست	۴۵ نادرست	۳۹ نادرست	۳۶ درست

عددهای حدس می‌زنیم که بر ۴ قابل تقسیم باشند در جدول مقابل از عدد بزرگتر از ۵۰ شروع کردیم می‌توان عدد کوچکتر از ۵۰ را حدس زد.

پس جواب عدد ۴۸ است.

مثال ۱۲: مریم می‌خواهد برای دوستانش هدیه بخرد و تصمیم می‌گیرد برای هر یک از آنها مداد بخرد. اگر برای هر یک مداد ۱۵۰ تومانی بخرد مبلغ ۲۰۰ تومان اضافه می‌آورد و اگر مداد ۱۷۵ تومانی بخرد مبلغ ۱۰۰ تومان کم می‌آورد. دوستان مریم چند نفر هستند.

حل: از رهیافت (حدس و آزمایش) صورت مسئله مشخص است برای اجرای رهیافت جدول صفحه

اختلاف پول	۱۰۰ - (تعداد × ۱۷۵)	۲۰۰ + (تعداد × ۱۵۰)	تعداد دوستان
$1700-1650=50$	$175\times 10-100=1650$	$10\times 150+200=1700$	۱۰
$1850-1825=25$	$175\times 11-100=1825$	$11\times 150+200=1850$	۱۱
$2000-2000=0$	$175\times 12-100=2000$	$12\times 150+200=2000$	۱۲

طبق محاسبات جدول تعداد دوستان مریم ۱۲ نفر هستند.

بازبینی و تعمیم: محاسبات را بازنویسی می‌کنیم و برای تعمیم می‌توان قیمت مدادها را تغییر داد و مریم احساس دیگری را به عنوان هدیه انتخاب کند و مسئله‌های جدید طرح کرد.

تبصره: می‌توان به صورت زیر مسئله را حل کرد (با روش معادله)

$175-150=25$ و $200-(-100)=300$

$300 \div 25 = 12$ تعداد دوستان مریم

$150n+200=175n-100 \Rightarrow 200+100=(175-150)n \Rightarrow n=\frac{300}{25}=12$

۴- رهیافت الگویابی: در این رهیافت با استفاده از داده‌ها (مفروضات) یک فرمول یا رابطه به عنوان الگو بین داده‌ها و مجهولات پیدا می‌کنیم و به کمک این رابطه جواب مسئله را به دست می‌آوریم. یافتن این الگو در مسئله هدف اصلی است.

برای نمونه برای هر معادله درجه ۲ یعنی $ax^2+bx+c=0$ می‌توان به صورت زیر عمل کرد و یک الگو برای حل این معادله به صورت $x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ یافت وقتی که $\Delta \geq 0$.

$$ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]=$$

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]=0$$

حال با فرض $\Delta=b^2-4ac$ داریم:

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=0$$

(۱) اگر $b^2-4ac=\Delta=0$ آنگاه $x=\frac{b}{2a}$ جواب معادله است.

(۲) اگر $b^2-4ac=\Delta<0$ آنگاه معادله جواب حقیقی ندارد.

(۳) اگر $\Delta>0$ در این صورت با تجزیه کردن اتحاد مزدوج $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$ داریم:

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]=a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$$

پس جواب‌ها عبارت است از $x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

مثال ۱۳: مجموع زوایای داخلی یک چندضلعی محدب (و همچنین چندضلعی منتظم) چند درجه است.

حل (رهیافت الگویابی): فهمیدن مسئله: شناخت چندضلعی محدب (چندضلعی که هیچ زاویهٔ مقعر (کاو) یا بیش از ۱۸۰ درجه نداشته باشد) و چندضلعی منتظم (چندضلعی محدبی که اندازهٔ همه ضلع‌ها با هم برابر باشد) در چندضلعی منتظم زوایای داخلی با هم برابر هستند؛ برای اجرای رهیافت از سه‌ضلعی شروع می‌کنیم و بعد چهارضلعی و ... و تا جایی که الگوی

مناسب پیدا نکرده ایم ادامه می دهیم. این جدول برای چندضلعی منتظم کامل می کنیم

چندضلعی	مثلث متساوی الاضلاع	مربع با دو مثلث تقسیم می شود	پنج ضلعی منتظم با سه مثلث تقسیم می کنیم	شش ضلعی منتظم با چهار مثلث تقسیم می کنیم	
مجموع زوایای داخلی	180 $(3-2)\times 180$	2×180 $(4-2)\times 180$	3×180 $(5-2)\times 180$	4×180 $(6-2)\times 180$	$\Longrightarrow (n-2)\times 180$

برای چندضلعی محدب هم به همین صورت است (در واقع به چندضلعی محدب تعمیم می دهیم.)

مثال ۱۴: تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه n عضوی را بیابید.

حل (رهیافت الگویابی) صورت مسئله قابل فهم است (باید زیرمجموعه را شناخت و اینکه همواره $A\subseteq A$ و $\emptyset\subseteq A$.

در یک جدول تعداد زیرمجموعه های مجموعه صفر عضوی و یک عضوی و دو عضوی و ... تا زمانی که الگوی مناسبی برای تعداد زیرمجموعه های n عضوی پیدا نکرده ایم ادامه می دهیم.

	مجموعه صفر عضوی	مجموعه یک عضوی $\{a\}$	مجموعه دو عضوی $\{a,b\}$	مجموعه سه عضوی $A=\{a,b,c\}$
زیرمجموعه ها	$\emptyset$	$\emptyset$ و $\{a\}$	$\emptyset$ و $\{a\}$ و $\{b\}$ و $\{a,b\}$	$\emptyset$ و $\{a\}$ و $\{b\}$ و $\{c\}$ و $\{a,b\}$ و $\{a,c\}$ و $\{b,c\}$ و $\{a,b,c\}$
تعداد زیرمجموعه ها	$2^0=1$	$2^1=2$	$2^2=4$	2^3

پس تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه n عضوی برابر 2^n است. تعداد زیرمجموعه ها با پیش حکم کردن تعداد زیرمجموعه ها است. برای تعمیم جدول فرمول کلی برای یک مجموعه متناهی n عضوی فرمول 2^n پیدا کرده ایم. می توان سوال را طوری مطرح کرد که آیا این فرمول برای تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه نامتناهی هم درست است؟

۵- رهیافت جدول نظام دار: این رهیافت هم یک نوعی مشابه رهیافت الگویابی است مخصوصا وقتی که مطالب خواسته شده را در یک جدول منظم می کنیم ولی با هم دیگر متفاوت هستند. مثل نمونه حل معادله درجه ۲ در رهیافت الگویابی که از نظم و جدول کمک نمی گیریم یا زمانی که برای محاسبه انتگرال توان های مثلثاتی فرمول ارائه می دهیم نیازی به نظم و جدول نداریم که در ادامه به آن می پردازیم. پس در رهیافت جدول نظام دار به کمک یک جدول یک نظم و فرمول برای اطلاعات خواسته شده را بدست می آوریم.

مثال ۱۵: مشتق nام تابع $\sin x$ را حساب کنید.

مرتبه مشتق	مرتبه صفرم	مرتبه اول	$(\sin x)''$	$(\sin x)'''$	$(\sin x)^{(4)}$
مشتق	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$

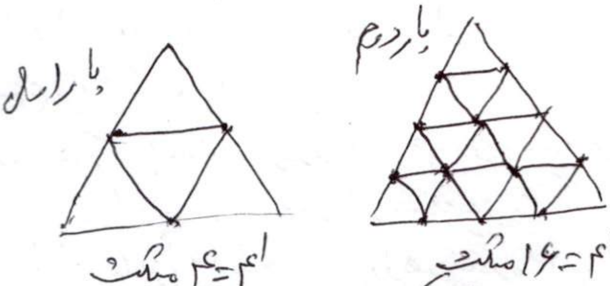
حل (رهیافت جدول نظام دار) ابتدا نقشه گرفتن مشتق و تنظیم دادن آن. بنابراین مشتق nام تابع $\sin x$ به عدد n بستگی دارد که در چهار حالت برای n بدست آمده است.

$$(\sin x)^{(n)}=\begin{cases}\cos x & n=4k+1\\ -\sin x & n=4k+2\\ -\cos x & n=4k+3\\ \sin x & n=4k\end{cases}$$

با پیش حکم کردن گرفتن مشتق و تعمیم می توان این مسئله را برای گرفتن مشتق nام تابع $\cos x$ تعمیم داد.

مثال ۱۶: یک مثلث متساوی الاضلاع در نظر می گیریم. اگر وسط اضلاع این مثلث را به هم وصل کنیم ۴ مثلث متساوی الاضلاع کوچکتر بدست می آید. این کار را دوباره برای این چهار مثلث انجام دهیم یا چند مثلث کوچکتر بسیم و

حال اگر این روند را ادامه دهیم بعد از ۱۰ بار وسط اضلاع مثلث های بدست آمده را به هم وصل کنیم چند مثلث متساوی الاضلاع بدست می آید؟



بار سوم $۴^۳$

حل: رهیافت جدول نظام دار:

اجرای نقشه: تقسیم کردن مثلث ها

بار دهم $۴^{۱۰}$ مثلث متساوی الاضلاع کوچک

بدست می آید. پس بعد از ۲۱ بار به $۴^{۲۱}$ مثلث متساوی الاضلاع کوچکتر می رسیم.

برای تعمیم: می توان به جای یک مثلث، یک مربع در نظر گرفت و وسط اضلاع مقابل را به هم وصل کنیم به چند مربع کوچکتر می رسیم و با ادامه این روند یعنی ۱۱ بار به چند مربع کوچکتر می رسیم؟

۶- رهیافت زیر مسئله: این رهیافت بیشتر در حل مسئله های ترکیبی استفاده می شود، در این روش یک مسئله به چندین مسئله کوچکتر (به عنوان زیر مسئله) تقسیم می شود و از حل آنها، مسئله اصلی هم حل می شود.

مثال ۱۷: مساحت مربعی به ضلع ۱۲ متر با مساحت مستطیلی به طول ۱۶ متر برابر است. عرض مستطیل را بدست آورید.

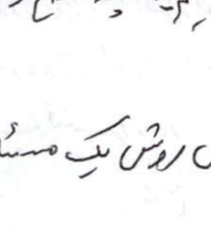
حل (رهیافت زیر مسئله) فهمیدن مسئله: باید محاسبه مساحت مربع و مساحت مستطیل بتوانیم انجام دهیم. اجرای نقشه

این مسئله به دو زیر مسئله تقسیم می کنیم. زیر مسئله اول: محاسبه مساحت مربع: $۱۲ \times ۱۲ = ۱۴۴$ = مساحت مربع

زیر مسئله دوم: مساحت مربع را برابر با مساحت مستطیل قرار می دهیم. اگر عرض مستطیل y باشد در این صورت داریم

$۱۶y = ۱۴۴$ = مساحت مستطیل بنابراین $y = \frac{۱۴۴}{۱۶} = ۹$ عرض مستطیل است.

بازبینی: بررسی محاسبات است و تعمیم هم می توان به جای مستطیل از متوازی الاضلاع استفاده کرد.



مثال ۱۸: در مربعی به ضلع ۴ سانتی متر دو کمان به شعاع ۴ سانتی متر طبق شکل مقابل زده ایم مساحت بین این دو کمان را بیابید.

حل: (رهیافت زیر مسئله) برای فهمیدن مسئله لازم است با مساحت مربع و دایره

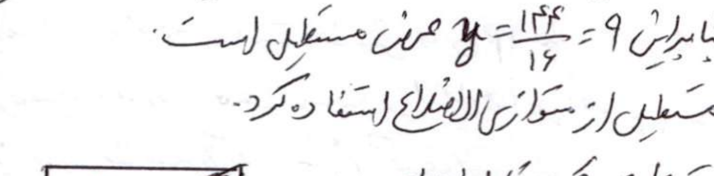
آشنا باشیم. اجرای رهیافت (نقشه) این مسئله را به سه زیر مسئله به صورت زیر تقسیم می کنیم

زیر مسئله اول: مساحت مربع: $۴ \times ۴ = ۱۶$

زیر مسئله دوم: مساحت نیم دایره: $\frac{۴ \times ۴ \times ۳/۱۴}{۲} = ۲۵/۱۲$

زیر مسئله سوم: (مساحت نیم دایره) − (مساحت مربع) = $۲۵/۱۲ - ۱۶ = ۹/۱۲$ = مساحت ناحیه هاشور خورده

زیرا اگر از وسط دو کمان قطر مربع قیچی کنیم و کنار هم قرار دهیم یک نیم دایره بدست می آید:



بازبینی: چک کردن روش حل و رسم شکل ها

تعمیم: می توان مساحت قسمت هاشور خورده را داد و مساحت قسمت مربع که هاشور نخورده است را حساب کرد.

۷- رهیافت مسئله ساده‌تر (رهیافت حذف حالت های نامطلوب) در برخی از مسائل داده ها و مفروضات طوری هستند (مثلاً اعداد اعشاری - اعداد مخلوط مقدار یا فرض های ...) که صورت مسئله را پیچیده و قابل فهم نیست و یافتن رهیافت برای حل آن آسان نیست. رهیافت مسئله ساده تر (حذف حالت های نامطلوب) است حالت هایی که باعث سردرگمی و پیچیدگی مسئله می‌شود را حذف می‌کند تا کسی که می‌خواهد مسئله حل کند بتواند رهیافت مورد نظر را انتخاب کند پس از تشخیص مسئله اصلی را حل می‌کند

مثال ۱۹: سالنی ۱۲ پنجره دارد و هر پنجره ۳ شیشه مستطیل شکل با طول ۳٫۲۵ متر و عرض ۱٫۱۷۵ متر دارد. مساحت شیشه های این سالن چند متر مربع است؟ (یا برای پنجره های این سالن چند متر مربع شیشه لازم است)

حل: برای برخی از افراد تعداد زیاد شیشه ها و اعداد اعشاری باعث می‌شود که از قید حل آن بگذرند ولی اگر اعداد اعشاری را به صورت اعداد صحیح در نظر بگیریم مثلاً طول = ۳ و عرض = ۲ و همچنین تعداد پنجره ها به جای ۱۲ عدد ۲ انتخاب کنیم راه حل آن به ذهن افراد می‌رسد و مساحت یک شیشه ۶=۲×۳ را حساب می‌کند و سپس جواب ۳۶ = ۶ × ۳ × ۲ متر مربع را به دست می‌آورد (یعنی از زیر مسئله کمک می‌گیرد).

حال از فرد خواسته می‌شود که مسئله اصلی حل کند. پس در اینجا از رهیافت حل مسئله کمک می‌گیرد.)

بنابراین رهیافت زیر مسئله را تشخیص می‌دهد

زیر مسئله اول: مساحت یک شیشه ۵٫۶۹ ≃ ۱٫۱۷۵ × ۳٫۲۵ متر مربع

زیر مسئله دوم: مساحت شیشه یک پنجره ۱۷٫۰۷ = ۵٫۶۹ × ۳ متر مربع

زیر مسئله سوم: مساحت شیشه های ۱۲ پنجره روی هم: ۲۰۴٫۸۴ = ۱۷٫۰۷ × ۱۲ متر مربع.

بازبینی: بررسی محاسبه و راه حل ها و تعمیم: تغییر مقدار پنجره ها و مقدار شیشه ها و تغییر نوع شیشه ها و یا تغییر شیشه به یک شئ دیگر.

مثال ۲۰: $4\frac{1}{4}$ کیلوگرم، چند گرم است.

حل: برای بعضی از دانش آموزان کار با اعداد مخلوط آسان نیست هر چند که مسئله یک مسئله آسانی است. اگر به جای $4\frac{1}{4}$ عدد معادل آن $\frac{17}{4}$ در نظر بگیریم (یعنی تبدیل عدد مخلوط به کسر یادآوری شود) رهیافت مسئله زودتر تشخیص می‌دهد. پس از رهیافت مسئله ساده تر استفاده می‌کنیم. اجرای رهیافت تبدیل کیلوگرم به گرم

$$4\times\frac{1}{4}\times 1000 = \frac{17}{4}\times 1000 = 17\times 250$$

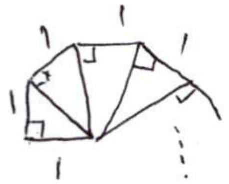
بازبینی: تبدیل عدد مخلوط به کسر و سپس تبدیل کیلوگرم به گرم.

تعمیم: تغییر کیلوگرم به متر مکعب و گرم به لیتر و یا واحدهای دیگر.

توجه: در بخش قبل رهیافت مسئله را دانسته فرض کردن و رهیافت استفاده از مسئله های کمکی و مرتبط به عنوان روشهای حل یک حکم ریاضی مورد بررسی قرار گرفت.

تمرین:

۱- جمله n ام دنباله ... و ۴۲ و ۳۰ و ۲۰ و ۱۲ و ۶ و ۲ را بیابید:



۲- در شکل مقابل طول وتر مثلث n ام را بیابید:

۳- در یک مراسم ۲۰ نفر شرکت کرده اند و با هم دست می دهند. هرکسی فقط یک بار با دیگری دست می دهد در این مراسم چند بار عمل دست دادن صورت می گیرد.

۴- حاصل جمع $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$ را بدست آورید.

۵- رقم یکان عدد 3^{301} را بدست آورید.

۶- کوچکترین عدد طبیعی که با نصف خودش جمع شود و حاصل بر دو عدد ۳ و ۷ بخشپذیر باشد.

۷- اگر x و y دو عدد طبیعی باشند مطلوبست $\frac{x}{2}=\frac{3}{y}$ آنگاه بیشترین مقدار x^y را بیابید.

۸- جمشید و مجید و مادرشان در حال خوردن یک کیک بودند و جمشید $\frac{1}{2}$ کیک و مجید $\frac{1}{4}$ کیک و مادرشان $\frac{1}{4}$ کیک را خوردند آیا از کیک چیزی باقی مانده است؟

۹- در یک مدرسه $\frac{2}{5}$ دانش آموزان کلاس اول و $\frac{1}{3}$ از دانش آموزان کلاس دوم و بقیه در کلاس سوم درس می خوانند چه کسری از دانش آموزان در کلاس سوم هستند.

۱۰- فاطمه ۱۴۸ سانتی متر قد دارد. خواهرش از دو برابر قد فاطمه ۱۲۰ سانتی متر کوتاهتر است. آنها روی هم چند سانتی متر قد دارند.

۱۱- در یک کارگاه یک میله آهنی به طول ۴/۲ متر را به قطعه های ۰/۶ متری تقسیم می کنند. این میله به چند قطعه تقسیم می شود.

قضیه اکسترمم مطلق روی یک بازه باز: $I=(a,b)$ اگر تابع $f(x)$ روی بازه باز I پیوسته باشد

الف) اگر $\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to b^-} f(x)=+\infty$ آنگاه $f(x)$ روی این بازه یک مقدار مینیمم مطلق دارد.

ب) اگر $\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to b^-} f(x)=-\infty$ آنگاه $f(x)$ روی این بازه یک مقدار ماکسیمم مطلق دارد.

تبصره: در این قضیه بازه I می تواند به صورت $(-\infty,+\infty)$ و $[a,+\infty)$ و $(a,+\infty)$ و $(-\infty,b]$ و $(-\infty,b)$ و $[a,b)$ و $(a,b]$ نیز باشد.

اگر یک طرف بازه I بسته باشد به جای حد $\lim_{x\to a^+} f(x)$ از مقدار $f(a)$ برای بازه $[a,b)$ و به جای حد $\lim_{x\to b^-} f(x)$ از مقدار $f(b)$ برای بازه $I=(a,b]$ استفاده می کنیم و در ∞ هم از حد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ استفاده می کنیم.

حال طبق این مسائل بهینه سازی زیر را حل کنید. (تمرین ۱۲ تا ۱۵)

۱۲- نزدیکترین نقطه روی منحنی $y^2=x^3$ که فاصله اش از نقطه $(0,2)$ کمترین باشد را بیابید.

۱۳- حجم کوچکترین مخروط مستدیر قائم محیط بر یک کره به شعاع R را بیابید.

۱۴- کوتاهترین فاصله بین نقطه $P=(0,2)$ و منحنی $y=\sqrt{x}$ را بیابید.

۱۵- کوچکترین حجم یک مخروط مستدیر قائم محیط بر یک نیم کره به شعاع R را بیابید.

۱۶- نشان دهید که تعداد اعداد اول نامتناهی است.