توابع چند متغیره و حد توابع چند متغیره:

در ریاضی ۱ با تعداد زیادی توابع یک متغیره آشنا شده‌ایم و تابع یک متغیره را با $y=f(x)$ نمایش دادیم. در بخش بردارها با معادله‌های آشنا شدیم که در آن چند متغیر وجود داشت مانند $z=x^2+y^2$ و $z=e^{(x^2+y^2)}$ و $z=\sqrt{x^2+y^2}$

همچنین برای محاسبه حجم مخروط و حجم استوانه و حجم یک مکعب مستطیل به ترتیب از فرمول‌های زیر استفاده می‌کنیم

$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ حجم مخروط ، $V=\pi r^2 h$ = حجم استوانه ، $V=xyz$ = حجم مکعب مستطیل

این معادله‌ها نمونه‌هایی از توابع دو متغیره و توابع سه متغیره هستند.

تعریف: تابع n متغیره f قاعده‌ای است که به هر n تایی $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ در مجموعه D عدد حقیقی و یکتایی که با $w=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ نمایش می‌دهیم، نسبت می‌دهد. مجموعه D دامنه f است (توجه! $D\subseteq\mathbb{R}^n$) و مجموعه همه مقادیری که f روی D می‌گیرد یعنی $\{f(x_1,x_2,\dots,x_n)\mid(x_1,x_2,\dots,x_n)\in D\}$ را برد تابع f می‌باشد.

در این تعریف اگر $n=1$ باشد با تابع یک متغیر $y=f(x)$ سروکار داریم و $D_f\subseteq\mathbb{R}$

اگر $n=2$ باشد با تابع دو متغیره $z=f(x,y)$ سروکار داریم و $D_f\subseteq\mathbb{R}^2$

اگر $n=3$ باشد با تابع سه متغیره $w=f(x,y,z)$ سروکار داریم و $D_f\subseteq\mathbb{R}^3$

این تعریف برای تابع دو متغیره به صورت زیر است (صفحه ۱۱۱ کتاب استوارت)

تابع دو متغیره f قاعده‌ای است که به هر زوج مرتب از عددهای حقیقی مانند (x,y) در مجموعه D عددی حقیقی و یکتا که آن را با $f(x,y)$ نشان می‌دهیم نسبت می‌دهد. مجموعه D را دامنه تابع f است و برد آن مجموعه همهٔ مقدارهایی است که f روی D می‌گیرد یعنی

$$R_f=\{f(x,y)\mid(x,y)\in D_f\}$$

در این تعریف (تابع دو متغیره $f(x,y)$) x و y متغیرهای مستقل و z متغیر وابسته است.

توجه: نمودار تابع دو متغیره $z=f(x,y)$ در فضای سه بعدی $\mathbb{R}^3$ رسم می‌شود و آن را رویه می‌نامیم.

مثال ۱: دامنه توابع زیر را بیابید و نمودار آن را رسم کنید و در صورت امکان برد تابع را بدست آورید.

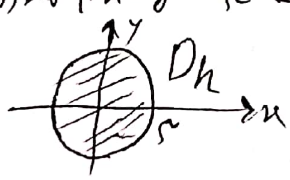
الف) $z=f(x,y)=x^2+y^2$ ، ب) $z=g(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ ، ج) $h(x,y)=z=\sqrt{9-x^2-y^2}$

د) $z=k(x,y)=3x^2+y^2$

حل: دامنه توابع قسمت الف) و ب) و د) همه $\mathbb{R}^2$ است یعنی $D_f=D_g=D_k=\mathbb{R}^2$ ؛

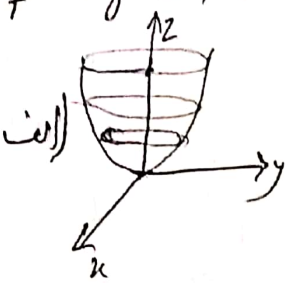
دامنه تابع قسمت ج) $z=h(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$ درون و روی دایره به مرکز $(0,0)$ و شعاع ۳ است زیرا

$$9-x^2-y^2\geq 0 \Longrightarrow x^2+y^2\leq 9$$

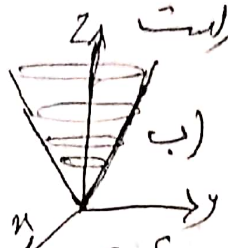


برد این توابع: $R_f = R_g = [0, +\infty)$ و $R_h = [0, 3]$ و $R_L = [0, +\infty)$

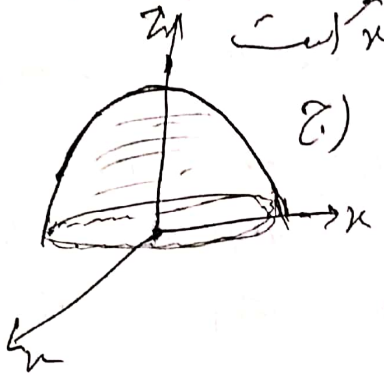
نمودار این توابع: نمودار $z = f(x,y) = x^2 + y^2$ سهمیگون دوار است



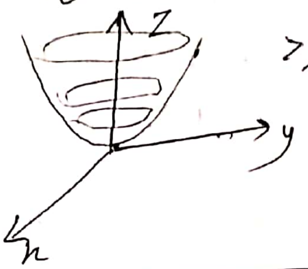
نمودار تابع $z = g(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ نیمه بالای مخروط است: ب)



نمودار تابع $z = h(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ نیمه بالای کره $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ است



نمودار تابع $z = L(x,y) = 4x^2 + y^2$ سهمیگون بیضوی است



مثال ۲: دامنه توابع زیر را بیابید:

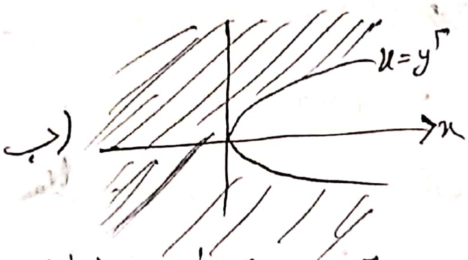
الف) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$ ب) $f(x,y) = x \ln(y^2 - x)$

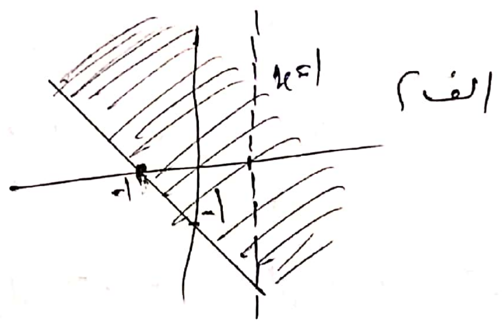
حل الف)

$$D_f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y + 1 \geq 0 , x \neq 1 \}$$

حل ب)

$$D_f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x > 0 \} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y^2 \}$$





قسمت هاشور خورده دامنه تابع است

منحنی های تراز: به کمک منحنی های تراز و مسیرهای تراز می توان نمودار یک تابع دو متغیره را ... ترسیم کرد.

تعریف: فرض کنید که $z = f(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد و $K \in R_f$ یک مقدار ثابت باشد. مجموعه همه نقطه هایی که در دامنه f واقع شده (x,y) است و در معادله $K = f(x,y)$ صدق می کنند و به عبارت دیگر منحنی با معادله $K = f(x,y)$ را یک منحنی تراز تابع (رویه) $z = f(x,y)$ می نامیم. و مجموعه تمام نقاطی از فضای $\mathbb{R}^3$ باشد (x, y, K) که در معادله

$K=f(x,y)$ را یک منحنی تراز یا یک مسیر تراز رویه f می‌نامیم.

توجه: منحنی‌های تراز تصاویر مسیرهای تراز (با تصویر) در صفحه xoy است. و اگر این منحنی‌های تراز را به اندازه $Z=K$ (برای $K>0$) بالا ببریم و (برای $K<0$) پایین ببریم مسیر تراز بدست می‌آید و مجموعه تمام این مسیرهای تراز شکل رویه f را می‌دهند.

به عبارت دیگر هر رویه (مقطع) رویه $Z=f(x,y)$ با صفحه $Z=K$ یک مسیر تراز تابع (رویه) f است.

مثال ۳: منحنی‌های تراز تابع الف) $Z=f(x,y)=x^2+y^2$ ب) $Z=g(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$ به ازای $K=0,1,2,3$ رسم کنید.

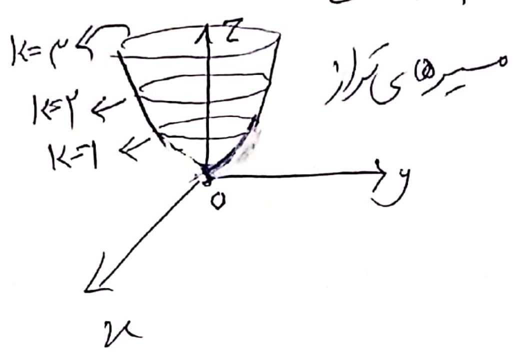
حل الف)

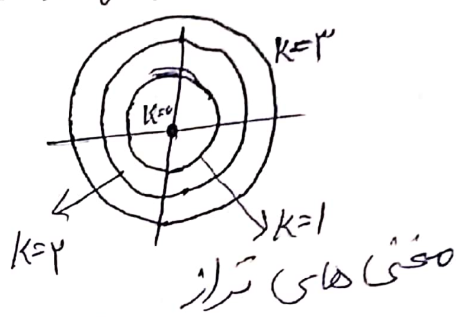
$$K=f(x,y)=x^2+y^2 \Rightarrow K=x^2+y^2 \Rightarrow \begin{cases} K=0 \Rightarrow (0,0) \\ K=1 \Rightarrow x^2+y^2=1 \\ K=2 \Rightarrow x^2+y^2=2 \\ K=3 \Rightarrow x^2+y^2=3 \end{cases}$$

مبداء مختصات

دایره ها

بنابراین منحنی‌های تراز رویه $Z=x^2+y^2$ دایره‌های هم مرکز با شعاع $\sqrt{K}$ هستند.





حل ب)

$$K=g(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2} \Rightarrow 9-x^2-y^2=K^2 \Rightarrow x^2+y^2=9-K^2$$

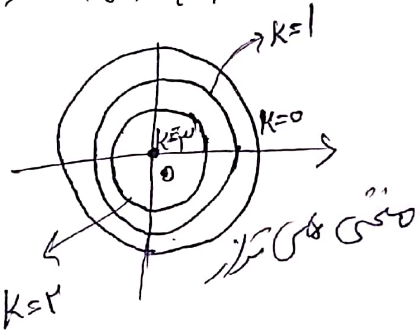
$K=0 \Rightarrow x^2+y^2=9$

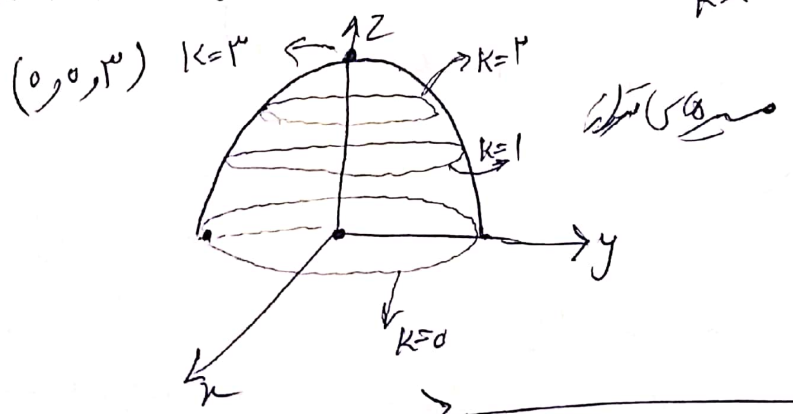
$K=1 \Rightarrow x^2+y^2=8$

$K=2 \Rightarrow x^2+y^2=5$

$K=3 \Rightarrow x^2+y^2=0 \Rightarrow (0,0)=(x,y),\ Z=3$

دایره‌های هم مرکز





تبصره: تمام اعمال روی توابع یک متغیره مانند جمع و ضرب و تقسیم و تفریق را می‌توان روی توابع دو و سه متغیره تعریف کرد. یعنی اگر $f(x,y)$ و $g(x,y)$ دو تابع دو متغیره باشند آنگاه $f(x,y)+g(x,y)$ و $f(x,y)-g(x,y)$ و $f(x,y)\cdot g(x,y)$ و $\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ و $\frac{g(x,y)}{f(x,y)}$ نیز توابع دو متغیره هستند و

$$D_{f+g}=D_{f-g}=D_{fg}=D_f\cap D_g$$

$$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{(x,y)\mid g(x,y)=0\}\quad و \quad D_{\frac{g}{f}}=D_f\cap D_g-\{(x,y)\mid f(x,y)=0\}$$

تبصره: ترکیب توابع دو متغیره با دو متغیره تعریف نمی‌شود ولی می‌توان یک تابع دو متغیره را با یک تابع یک متغیره به صورت زیر ترکیب کرد.

$$z=f(x,y)\quad و \quad w=g(z)\Longrightarrow w=g(f(x,y))=(g\circ f)(x,y)$$

برای تابع سه متغیره

$$w=f(x,y,z)\quad و \quad t=g(w)\Longrightarrow t=g(f(x,y,z))=g\circ f(x,y,z)$$

تبصره: با تغییر متغیر می‌توان متغیرهای یک تابع چند متغیره را تغییر داد (به صورت زیر)

$$z=x^2+y^2\quad و \quad \begin{cases}x=\sin t\\ y=\cos t\end{cases}\Longrightarrow z=\sin^2 t+\cos^2 t=1\Longrightarrow z=1$$

$$z=x^2-y^2\quad و \quad \begin{cases}x=u+v\\ y=uv\end{cases}\Longrightarrow z=(u+v)^2-u^2v^2=u^2+v^2+2uv-u^2v^2$$

$$w=xyz\quad و \quad \begin{cases}x=t\\ y=\frac{1}{t}\\ z=t^2\end{cases}\Longrightarrow w=t\left(\frac{1}{t}\right)(t^2)=t^2\Longrightarrow w=t^2$$

$$z=x^2+y^2\quad و \quad \begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}\Longrightarrow z=r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta\Longrightarrow z=r^2$$

حد توابع چند متغیره:

تعریف حد را برای توابع دو متغیره می‌نویسیم و حد توابع سه متغیره و چند متغیره به طور مشابه تعریف می‌شود.

تعریف: فرض کنید که $f(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد و D_f دامنه تابع f نقطه‌هایی به دلخواه نزدیک به (a,b) را در بر داشته باشد. در این صورت می‌گوییم حد تابع $f(x,y)$ وقتی که (x,y) به سمت (a,b) میل می‌کند برابر با L است و

می‌نویسیم $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ با شرطی که برای هر عدد مثبت ε عدد مثبت δ وجود داشته باشد بطوریکه

$$(x,y)\in D\ ,\quad 0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta \Rightarrow |f(x,y)-L|<\varepsilon$$

توجه: برای حد توابع سه متغیره بجای $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ می‌نویسیم $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$ باقی جملات و عبارات در تعریف مشابه تعریف بالا است.

قضیه: حد تابع در صورت وجود منحصر بفرد است.

نتیجه: فرض کنید که S_1 و S_2 دو مسیر در ناحیه D شامل نقطه (a,b) باشد اگر $\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ S_1}} f(x,y) = L_1$ و $\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ S_2}} f(x,y) = L_2$ و $L_1 \neq L_2$ آنگاه $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ وجود ندارد.

از نتیجه بالا برای توابعی استفاده می‌کنیم که دارای حد نیستند. S_1 و S_2 می‌توانند دو منحنی باشند که در نقطه (a,b) داخل ناحیه D قرار می‌گیرند (برای موجود نبودن حد توابع)

مثال ۴: نشان دهید که حدهای زیر موجود نیست.

الف) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ ب) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ ج) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$

حل: برای هر سه حد یکی از مسیرها می‌تواند محور xها باشد یعنی $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=0\}$

الف) مسیر دوم محور yها در نظر می‌گیریم $T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=0\}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ S}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = 1 \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ T}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{y^2} = -1$$

بنابراین حد قسمت الف) وجود ندارد.

ب) مسیر دوم خط $y=x$ در نظر می‌گیریم یعنی $L=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=x\}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ S}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2} = 0 \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ L}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

بنابراین حد قسمت ب) وجود ندارد.

ج) مسیر دوم سهمی $y^2=x$ در نظر می‌گیریم یعنی $T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=y^2\}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ S}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2} = 0 \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ T}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{y\to 0}\frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}$$

بنابراین حد قسمت ج) وجود ندارد.

نکته: برای وجود نداشتن حد باید مسیرها را طوری انتخاب کنیم که بعد از جایگذاری حد رفع ابهام شود. مثلاً در قسمت الف) یکبار متغیر x و بار دیگر متغیر y را در حد از بین می‌بریم.
در قسمت ب) و ج) طوری مسیر انتخاب کردیم که درجه صورت و مخرج کسر یکسان شود.

توجه: برای وجود حد چه باید کرد (چگونه حد را بدست آوریم)؟
جواب: در مرحله اول باید مقدار داده شده را جایگذاری کنیم مثلاً $(x,y)\to(a,b)$ مقدار a و b را جای x و y قرار می‌دهیم. اگر حد مبهم نباشد مقدار حد بدست می‌آید.
اگر حد مبهم شود در مرحله دوم باید رفع ابهام کنیم. برای رفع ابهام می‌توان از تجزیه کردن - هم ارزی و تغییر متغیر کمک گرفت. به مثال زیر توجه کنید. (در توابع دو متغیره برای محاسبه حد نمی‌توان از قانون هوپیتال استفاده کرد)

مثال ۵: حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.

$$\text{الف)}\ \lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{2xy+1}{x^2+y^2}=\frac{2+1}{1+1}=\frac{3}{2}$$

با تغییر متغیر $t=x^2+y^2$ و هم ارزی داریم

$$\text{ب)}\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\lim_{t\to0}\frac{\sin(t)}{t}=1$$

$$\text{ج)}\ \lim_{(x,y)\to(1,-1)}\frac{x+y}{x^2-y^2}=\lim_{(x,y)\to(1,-1)}\frac{\cancel{(x+y)}}{\cancel{(x+y)}(x-y)}=\lim_{(x,y)\to(1,-1)}\frac{1}{x-y}=\frac{1}{2}$$

$$\text{د)}\ \lim_{(x,y)\to(1,3)}\frac{27x^3-y^3}{3x-y}=\lim_{(x,y)\to(1,3)}\frac{\cancel{(3x-y)}(9x^2+3xy+y^2)}{\cancel{(3x-y)}}=\lim_{(x,y)\to(1,3)}(9x^2+3xy+y^2)$$

$$=(9+9+9)=27$$

توجه: در هر چهار حد بالا بعد از جایگذاری با $\frac{0}{0}$ مواجه شدیم.

توجه: برای وجود حد می‌توان با کمک تعریف ε و δ آن را اثبات کرد که برای دانشجویان رشته‌های مهندسی از آن استفاده نمی‌کنیم.

چند مثال اضافی در حدگیری:

مثال ۶: حدهای زیر را در صورت وجود بیابید

الف) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$ ، ب) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^3+yz^2}{x^4+y^2+z^4}$ ، ج) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^2y^2z^2}{x^6+y^6+z^6}$

حل: هر یک حدهای مورد نظر را از طریق انتخاب مسیرها آن را بررسی می‌کنیم

الف) دو مسیر $S_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=0\}$ و $S_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=y^2\}$ در نظر می‌گیریم.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ S_1}} \frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^6} = 0 \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ S_2}} \frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3} = \lim_{y\to 0} \frac{y^{12}}{8y^{12}} = \frac{1}{8}$$

ب) دو مسیر $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=0, y=0\}$ و $T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=0, y=z^2\}$ در نظر می‌گیریم.

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ S}} \frac{x^3+yz^2}{x^4+y^2+z^4} = \lim_{z\to 0} \frac{0}{z^4} = 0 \neq \lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ T}} \frac{x^3+yz^2}{x^4+y^2+z^4} = \lim_{z\to 0} \frac{z^4}{2z^4} = \frac{1}{2}$$

ج) دو مسیر $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=0\}$ و $T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=y=z=t\}$ در نظر می‌گیریم.

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ S}} \frac{x^2y^2z^2}{x^6+y^6+z^6} = \lim_{(y,z)\to(0,0)} \frac{0}{y^6+z^6} = 0 \neq \lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ T}} \frac{x^2y^2z^2}{x^6+y^6+z^6} = \lim_{t\to 0} \frac{t^6}{3t^6} = \frac{1}{3}$$