ادامه فصل ۵ انتگرال (جلسه دوم)

برخی ویژگی‌های انتگرال معین : (با فرض انتگرال‌پذیر بودن توابع)

۱) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

۲) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ (جابجایی کران‌ها، انتگرال را در منفی ضرب می‌کند)

۳) $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$ (c عدد ثابت)

۴) $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

۵) $\int_a^b c f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$ (c عدد ثابت)

۶) $\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

۷) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

حالت خاص

(توضیح در فایل صوتی)

۸) $\underset{[a,b]\text{ در}}{f(x)\geqslant 0} \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$

۹) $\forall x\in[a,b],\ f(x)\leq g(x) \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

۱۰) $\forall x\in[a,b],\ m\leq f(x)\leq M \Longrightarrow m(b-a)\leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$

مثال: اگر $\int_0^{10} f(x)\,dx = 17$ و $\int_0^{8} f(x)\,dx = 12$ آنگاه $\int_8^{10} f(x)\,dx$ را بیابید.

جواب: داریم (بنابر خاصیت ۷)

$$\int_0^{10} f(x)\,dx = \int_0^{8} f(x)\,dx + \int_8^{10} f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow 17 = 12 + \int_8^{10} f(x)\,dx \Rightarrow \boxed{\int_8^{10} f(x)\,dx = 5}$$

تمرین ۵۲ ص ۳۹۱ نشان دهید:

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \leq \int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx$$

جواب:

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow x^2 \leq x \Rightarrow 1+x^2 \leq 1+x$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{1+x}$$

$$\xRightarrow[\text{خاصیت ۹}]{} \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \leq \int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx$$

تمرین ۵۳ ص ۳۹۱ نشان دهید

$$2 \leq \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\,dx \leq 2\sqrt{2}$$

(بعهده خودتان)

تمرین ۵۴ ص ۳۹۱ نشان دهید

$$\frac{\sqrt{2}}{24}\pi \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx \leq \frac{\sqrt{3}}{24}\pi$$

جواب:

$$f(x) = \cos x, \quad \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$$

$$f'(x) = -\sin x$$

f' بر $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ منفی لذا تابع نزولی است $\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{6}\right), \quad x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \leq \cos x \leq \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \xRightarrow[\text{خاصیت ۱۰}]{} \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx$$

$$\leq \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2\pi}{24} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2\pi}{24} \Longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{24}\pi \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx \leq \frac{\sqrt{3}}{24}\pi .$$

تمرین ۵۷ ص ۳۹۱ با کمک خاصیت ۱۰، انتگرال $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x\,dx$ را تخمین بزنید.

جواب:

$$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{3} \Longrightarrow \underbrace{y=\tan x}_{\text{صعودی است}} \Longrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \leq \tan x \leq \tan\left(\frac{\pi}{3}\right),\ x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$$

$$\Longrightarrow 1 \leq \tan x \leq \sqrt{3},\ x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{خاصیت ۱۰}} 1\times\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x\,dx \leq \sqrt{3}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{\pi}{12} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x\,dx \leq \frac{\sqrt{3}\pi}{12}$$

تمرین ۵۸ ص ۳۹۱

تمرین ۶۰ ص ۳۹۱

با کمک خاصیت ۱۰، انتگرال های زیر را تخمین بزنید.

۵۸) $\int_0^2 (x^3-3x+3)\,dx$

۶۰) $\int_{\pi}^{2\pi} (x-2\sin x)\,dx$

تمرین ۶۹ ص ۳۹۱ حد داده شده را به شکل انتگرال بنویسید.

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^4}{n^5}$$

جواب: داریم $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x\, f(x_i)$ که

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$

$x_i = a + i\Delta x$

لذا $\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^4}{n^5} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\times\left(\frac{i}{n}\right)^4$: پس با مقایسه داریم

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n}$$

$$x_i=a+i\Delta x=\frac{i}{n} \implies a=0,\ b=1$$

$$f(x_i)=\left(\frac{i}{n}\right)^4 \to f(x)=x^4$$

پس

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^4}{n^5}=\int_0^1 x^4\,dx.$$

تمرین ۷۰ ص ۳۹۱ حد را به شکل انتگرال معین بنویسید.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}$$

(بعهده خودتان)

تمرین ۴۱ ص ۴۲۹ با کمک خواص انتگرال نشان دهید.

$$\int_0^1 x^2\cos x\,dx\leq\frac{1}{3}$$

جواب:

$$0\leq x\leq 1 \implies \cos x \implies \cos 1\leq\cos x\leq\cos 0$$

نزولی (در ربع اول)

$$\implies \cos x\leq 1 \implies x^2\cos x\leq x^2,\quad x\in[0,1]$$

$$\underset{\text{خاصیت ۹}}{\implies}\int_0^1 x^2\cos x\,dx\leq\int_0^1 x^2\,dx$$

از طرفی داریم

$$\int_0^1 x^2\,dx=\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta x\, f(x_i)$$

$a=0$
$b=1$

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n}$$

$$x_i=a+\Delta x\, i=\frac{i}{n}$$

$$f(x)=x^2$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\times\frac{i^2}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

پس

$$\int_0^1 x^2\cos x\,dx\leq\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}$$

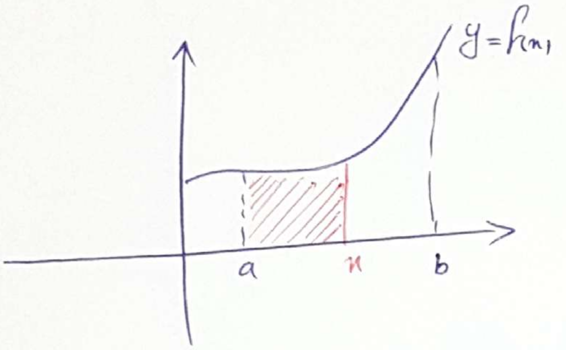
و در نتیجه

$$\int_0^1 x^2\cos x\,dx\leq\frac{1}{3}$$

حال به بیان مفهوم انتگرال به شیوه دیگری می‌پردازیم. ابتدا قضیه‌ی کارا را ذکر می‌کنیم

اگر تابع $f(x)$ بر بازه $[a,b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه $g(x)=\int_a^x f(t)dt$ برای $x\in[a,b]$ تابعی است که

بر بازه $[a,b]$ پیوسته بوده، بر بازه (a,b) مشتق‌پذیر است و داریم $g'(x)=f(x)$.



$g(x)=\int_a^x f(t)dt=$ مساحت ناحیه هاشور خورده

(توضیحات بیشتر در فایل صوتی)

مثال: مشتق $g(x)=\int_0^x\sqrt{1+t^2}\,dt$ را بیابید.

جواب: داریم $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ و $g'(x)=f(x)$. پس $g'(x)=\sqrt{1+x^2}$.

مثال: $\frac{d}{dx}\int_1^{x^2}\sec t\,dt$ را بیابید.

جواب: براساس مفهوم مشتق ترکیب توابع ثابت می‌شود (اثبات لازم نیست) که

$$\boxed{\left(\int_a^{h(x)} f(t)\,dt\right)' = h'(x)\,f(h(x))}$$

لذا

$$\frac{d}{dx}\int_1^{x^2}\sec t\,dt=(x^2)'\times\sec(x^2)$$
$$=2x\times\sec(x^2).$$

در واقع در حالت کلی داریم:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt\right) = h'(x)\, f(h(x)) - g'(x)\, f(g(x)).}$$

تمرین ۱۸ صفحه ۴۰۳ مشتق بگیرید.

$$y = \int_{\frac{1}{x^2}}^{0} \sin^3 t\,dt$$

جواب: بر اساس فرمول بالا داریم

$$y' = \overset{\text{صفر}}{\cancel{(0)' \times \sin^3(0)}} - \left(\frac{1}{x^2}\right)' \sin^3\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= -\left(\frac{-2}{x^3}\right) \sin^3\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{x^3} \sin^3\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

تمرین ۴۷ صفحه ۴۰۳ مشتق بگیرید

$$g(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{u^2-1}{u^2+1}\,du$$

جواب: بر اساس فرمول بالا داریم

$$g'(x) = (3x)' \times \frac{(3x)^2-1}{(3x)^2+1} - (2x)' \times \frac{(2x)^2-1}{(2x)^2+1}$$

$$= 3 \times \frac{9x^2-1}{9x^2+1} - 2 \times \frac{4x^2-1}{4x^2+1}.$$

تمرین های ۷ تا ۱۷ و همچنین ۴۸ تا ۵۱ صفحه ۴۰۳ کتاب را حل نمائید.

تعریف: تابع $F(x)$ را پادمشتق تابع $f(x)$ گوییم، اگر $F'(x)=f(x)$.

مثال:

$f(x)$	$F(x)$ (پادمشتق)	
$2x$	$x^2\ ,\ x^2-1\ ,\ x^2+C$	(C عدد)
1	$x\ ,\ x+3\ ,\ x+C$	(C عدد)
$\sin x$	$-\cos x\ ,\ -\cos x+C$	"
$\frac{1}{2}x^2$	$\frac{1}{6}x^3\ ,\ \frac{1}{6}x^3+C$	"

بعبارت بهتر با سادگی دیده می‌شود که اگر $F(x)$ پادمشتق $f(x)$ باشد، آن گاه $F(x)+C$ برای هر عدد C نیز پادمشتق $f(x)$ است. لذا $F(x)+C$ (C عدد) را صورت کلی پادمشتق تابع $f(x)$ نامند.

تعریف: انتگرال نامعین تابع $f(x)$ را که با نماد $\int f(x)dx$ نمایش می‌دهند صورت کلی پادمشتق تابع $f(x)$ تعریف می‌کنند یعنی

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$ که در آن $F'(x)=f(x)$

بعنوان مثال

$$\int 2x\,dx = x^2+C\ ,\quad \left((x^2+C)' = 2x\right)$$ چون

$$\int 1\,dx = x+C\ ,\quad \left((x+C)' = 1\right)$$ چون

$$\int \sin x\,dx = -\cos x+C\ ,\quad \left((-\cos x+C)' = \sin x\right)$$ چون

$$\int \frac{1}{2}x^2dx = \frac{1}{6}x^3+C\ ,\quad \left(\left(\frac{1}{6}x^3+C\right)' = \frac{1}{2}x^2\right)$$ چون

یادآوری می‌نماییم که جواب انتگرال معین $\int_a^b f(x)dx$ (در صورت وجود) همیشه یک عدد حقیقی خواهد بود

ولی جواب انتگرال نامعین $\int f(x)dx$ (در صورت وجود) تابعی بر حسب x است.

حال در قضیه مهم زیر رابطه بین این دو مفهوم را ذکر می‌کنیم.

قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال: اگر f بر $[a,b]$ پیوسته باشد، آن گاه

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

که در آن جا $F(x)$ پاد مشتق $f(x)$ است، یعنی $F'(x)=f(x)$.

(توضیحات تکمیلی در فایل صوتی)

مثال: $\int_{-2}^{1} x^3 dx = ?$

جواب: $f(x)=x^3 \Longrightarrow F(x)=\frac{1}{4}x^4$

پس

$$\int_{-2}^{1} x^3 dx = F(1)-F(-2) = \left(\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}\times(-2)^4\right)$$

$$= \frac{1}{4} - 4 = -\frac{15}{4}.$$

معمولاً قضیه اساسی به این شکل هم نوشته می‌شود که:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big]_a^b = F(b)-F(a)$$

که در آن $F'(x)=f(x)$.

مثال: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x\,dx = \sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$

مثال: مساحت زیر منحنی $\cos x$ را از ۰ تا b بیابید $0 \le b \le \frac{\pi}{2}$.

جواب: $f(x) = \cos x \Longrightarrow F(x) = \sin x$

$$\text{مساحت مذکور} = \int_0^b f(x)\,dx = F(x)\Big]_0^b = F(b) - F(0) = \sin b - \sin 0 = \sin b$$

تمرین ۲۸ صفحه ۴۰۳ آیا تساوی زیر درست است؟

$$\int_{-1}^{2} \frac{4}{x^3}\,dx = \frac{-2}{x^2}\Big]_{-1}^{2} = \frac{3}{2}$$

خیر زیرا $\frac{4}{x^3}$ بر $[-1,2]$ تعریف نشده است. در واقع نقطه صفر که در بازه $[-1,2]$ قرار دارد در دامنه تابع $\frac{4}{x^3}$ نیست. لذا تابع $y = \frac{4}{x^3}$ بر بازه $[-1,2]$ پیوسته نبوده و نمی‌توان از قضیه اساسی حساب استفاده کرد.

تمرین‌های ۳۹ و ۴۰ صفحه ۴۰۳ را حل نمائید.

حدهای زیر را بر حسب انتگرال بدست آورید.

تمرین ۵۷ صفحه ۴۰۴ $\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^3}{n^4}$ (بعهده خودتان)

تمرین ۵۸ صفحه ۴۰۴ $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n}}\right)$

جواب تمرین ۵۸:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n}}\right) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{i}{n}}$$

داشتیم $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x\, f(x_i)$ که در آن $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ ، $x_i = a + i\Delta x$. پس

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$$

$$x_i = a + i\Delta x = \frac{i}{n} \Longrightarrow \begin{array}{l} a=0 \\ b=1 \\ f(x)=\sqrt{x} \end{array}$$

$$f(x_i) = \sqrt{\frac{i}{n}}$$

بنابراین

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n}}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}} = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx$$

قضیه اساسی حساب

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1 = \frac{2}{3}$$

زیرا داریم

$$\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)' = \sqrt{x}$$

برخی خواص انتگرال نامعین : a و c عدد هستند

۱) $\int c f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$

۲) $\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

۳) $\int a\,dx = ax + C$

۴) $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C\,,\ (n \neq -1)$

۵) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

۶) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

۷) $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$

۸) $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C.$

مثال: انتگرال‌های زیر را بیابید

1) $\int (10x^4 - 2\sec^2 x)\,dx \xrightarrow[\text{خواص}]{\text{بنابر}} 10\int x^4\,dx - 2\int \sec^2 x\,dx$

$$= 10 \times \frac{x^5}{5} - 2 \times \tan x + C = 2x^5 - 2\tan x + C$$

2) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \tan x \times \sec x\,dx = \sec x + C.$

3) $\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}\,dt \xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{ابتدا ساده}} \int_1^9 \left(\frac{2t^2}{t^2} + \frac{t^2\sqrt{t}}{t^2} - \frac{1}{t^2}\right)dt$

$$= \int_1^9 \left(2 + \sqrt{t} - \frac{1}{t^2}\right)dt = \int_1^9 \left(2 + t^{\frac{1}{2}} - t^{-2}\right)dt$$

$$= \left(2t + \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{t^{-2+1}}{-2+1}\right]_1^9$$

$$= \left(2t + \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{t^{-1}}{-1}\right]_1^9$$

$$= \left(2t + \frac{2}{3}t\sqrt{t} + \frac{1}{t}\right]_1^9$$

$$= \left(2\times 9 + \frac{2}{3}9\sqrt{9} + \frac{1}{9}\right) - \left(2\times 1 + \frac{2}{3}\times 1 + 1\right) = \cdots$$

تمرین ۶ ص ۳۱۳

$$\int (\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2})\,dx = \int (x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{2}{3}})\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C$$

داشتیم $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1$

$$= \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C.$$

تمرین ۹ ص ۲۱۳

$$\int (1-t)(2+t^2)\,dt = \int (2+t^2-2t-t^3)\,dt = 2t + \frac{t^3}{3} - \frac{2t^2}{2} - \frac{t^4}{4} + C.$$

تمرین ۱۳

$$\int \sec t(\sec t + \tan t)\,dt = \int (\sec^2 t + \sec t \tan t)\,dt = \int \sec^2 t\,dt + \int \sec t \tan t\,dt$$
$$= \tan t + \sec t + C$$

تمرین ۱۶

$$\int \frac{\sin 2x}{\sin x}\,dx = \int \frac{2\sin x \cos x}{\sin x}\,dx = \int 2\cos x\,dx = 2\int \cos x\,dx = 2\sin x + C$$

تمرین ۲۳

$$\int_0^4 (2v+5)(3v-1)\,dv = \int_0^4 (6v^2-2v+15v-5)\,dv = \frac{6v^3}{3} - \frac{2v^2}{2} + \frac{15v^2}{2} - 5v\Big]_0^4$$
$$= 2v^3 + \frac{13}{2}v^2 - 5v\Big]_0^4 = \left(2\times(4)^3 + \frac{13}{2}(4)^2 - 5\times(4)\right) - (0) = \cdots$$

تمرین ۲۵

$$\int_1^4 \sqrt{t}(1+t)\,dt = \int_1^4 (\sqrt{t} + t\sqrt{t})\,dt = \int_1^4 (t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{3}{2}})\,dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\Big]_1^4$$
$$= \left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right]_1^4 = \cdots$$

تمرین ۳۰

$$\int_1^2 \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx = \int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right) dx = \int_1^2 (x^2 + x^{-2} + 2)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^{-1}}{-1} + 2x\right]_1^2 =$$
$$= \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 4\right) - \left(\frac{1}{3} - 1 + 2\right) = \cdots$$

تمرین ۳۶

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\theta + \sin\theta\tan^2\theta}{\sec^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\theta(1+\tan^2\theta)}{\sec^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\theta \times \sec^2\theta}{\sec^2\theta}\,d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\theta\,d\theta = -\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = \left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) - (-\cos 0) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

تمرین ۴۲

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\sin x|\,dx = ?$$

در توابعی که قدرمطلق دارند ابتدا براساس بازه انتگرال گیری داده شده، تکلیف قدرمطلق را مشخص می کنیم و بعد انتگرال می گیریم

چون $\sin$ در ربع های اول و دوم مثبت و در ربع سوم منفی است؛ لذا انتگرال را براساس علامت آن به صورت مجموع دو انتگرال می نویسیم

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\sin x|\,dx = \underbrace{\int_0^{\pi} |\sin x|\,dx}_{\text{در ربع های اول و دوم } \sin \text{ مثبت است}} + \underbrace{\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} |\sin x|\,dx}_{\text{در ربع سوم } \sin \text{ منفی است}} = \int_0^{\pi} \sin x\,dx + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} -\sin x\,dx$$

$$= \left(-\cos x\right]_0^{\pi} + \left(\cos x\right]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$= \left((-\cos\pi) - (-\cos 0)\right) + \left(\cos\frac{3\pi}{2} - \cos\pi\right)$$

$$= (1+1) + (0+1) = 3.$$

چند نکته :

1) $\int_a^b (f(x)g(x))\,dx \neq \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)$

2) $\int_a^b x f(x)\,dx \neq x\int_a^b f(x)\,dx$

3) $\int_a^b \sqrt{f(x)}\,dx \neq \sqrt{\int_a^b f(x)\,dx}$

4) $\frac{d}{dx}\Big(\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{ثابت است}}\Big) = \frac{d}{dx}(\text{یک عدد}) = 0$ مشتق عدد همیشه صفر است

تمرین های ۵، ۷، ۱۰، ۲۶، ۲۸، ۳۱، ۳۲، ۳۷ و ۴۱ ص ۴۱۳

تمرین های ۴۲، ۴۹ و ۵۶ ص ۴۲۹ کتاب را بعنوان تمرین حل نمائید.

همان گونه که ذکر شد $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$. لذا مسأله $\int x^{-1} dx$ یا همان $\int \frac{1}{x} dx$ حل نشده باقی ماند. در فصل توابع نمایی لگاریتمی اشاره شد که

$$\ln x := \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

و لذا داشتیم $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ و در نتیجه $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$.

قدر مطلق را جهت تاکید بر مثبت بودن دامنه تابع ln قرار می‌دهیم.

همچنین داشتیم $(e^x)' = e^x$ و لذا داریم $\int e^x dx = e^x + C$.

و $(a^x)' = a^x \ln a$، لذا $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

به عنوان مثال

$$\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C.$$

در فصل روش‌های انتگرال‌گیری به ترتیب روش‌هایی جهت انتگرال‌گیری از توابع آموزش داده خواهد شد.