در این قسمت عمل کرل که روی میدان‌های برداری می‌توان انجام داد و همچنین کاربرد آن‌ها را بیان می‌کنیم و در ادامه قضیه گرین را با ذکر چند مثال مورد بحث قرار می‌دهیم.

تعریف: $\vec{F}=(P,Q,R)$ میدان برداری و $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ میدان اسکالر و عملگر نابلا $\vec{\nabla}=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})$ می‌باشد.

1) $\underbrace{div(\vec{F})}_{\text{دیورژانس } F}=\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$

$\underbrace{div(\vec{F})}_{\text{میدان اسکالر}}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$

2) $curl(\vec{F})=\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\vec{i}+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\vec{j}+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\vec{k}$

(کرل یا چرخش) تاو

$curl\vec{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

توجه ۱: ساده‌ترین راه به خاطر سپردن $curl\vec{F}$ همان ضرب خارجی $\vec{\nabla}\times\vec{F}$ است.

تاو F

($curl\vec{F}$ میدان برداری است)

3) $\underbrace{\Delta f=\nabla^2 f=div(\nabla f)}_{\text{لاپلاسین}}=f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}$

$\boxed{\nabla^2=\nabla\cdot\nabla}$

توجه ۲: $\vec{F}$ میدان برداری است و f میدان اسکالر است با هم اشتباه نگیرید.

۱- چنانچه $\nabla^2 f=0$ می‌گوییم f تابعی همساز (هارمونیک می‌باشد)

توجه ۳- $curl\vec{F}$ میدان برداری است امّا $div\vec{F}$ میدان اسکالر است

[illegible]

قضیه: اگر f تابعی سه متغیره باشد که مشتق‌های جزئی مرتبه دوم پیوسته دارد، آنگاه $curl(\nabla f)=\vec{0}$

1) $curl(\vec{\nabla}f)=\vec{\nabla}\times\nabla f=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z}\end{vmatrix}=(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y})\vec{i}+(\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z})\vec{j}+(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x})\vec{k}=0\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}=\vec{0}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}$

چون مشتق جزئی مرتبه دوم پیوسته است

2) $div\,curl\vec{F}=0$ $\quad(div\,curl\vec{F}=\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{F}))=0$

اثبات در تست 1372

ارتباط بین $\text{curl}\,\vec{F}$ و میدان برداری پایستار

میدان برداری $\vec{F}$ پایستار است اگر و تنها اگر $\text{curl}\,\vec{F}=\vec{0}$. به عبارتی دیگر اگر دامنه $\vec{F}$ با دامنه $\mathbb{R}^n$ برابر $\mathbb{R}^n$ باشد $\vec{F}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ، $\text{curl}\,\vec{F}=\vec{0} \iff F$ میدان برداری پایستار است .

مثال 3 ص 1370

الف) نشان دهید که $\vec{F}(x,y,z)=\underbrace{y^2z^3}_{P}\,\vec{i}+\underbrace{2xyz^3}_{Q}\,\vec{j}+\underbrace{3xy^2z^2}_{R}\,\vec{k}$ میدان برداری پایستار است .

ب) تابعی مانند f پیدا کنید که $\vec{F}=\nabla f$

حل : ابتدا کرل F را حساب می کنیم

$$\text{curl}\,\vec{F}=\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2z^3 & 2xyz^3 & 3xy^2z^2\end{vmatrix}$$

$$=(6xyz^2-6xyz^2)\vec{i}-(3y^2z^2-3y^2z^2)\vec{j}+(2yz^3-2yz^3)\vec{k}$$

$$=0\vec{i}+0\vec{j}+\vec{0}k=\vec{0}=\langle 0,0,0\rangle$$

چون $\text{curl}\,\vec{F}=\vec{0}$ و دامنه $\vec{F}$ ، $\mathbb{R}^3$ است . پس $\vec{F}$ میدان برداری پایستار است .

ب) برای حل ب روشی ساده تر بیان می کنیم .

طریقه به دست آوردن f : $\Longleftarrow$ $f(x,y,z)=\int P\,dx+\int Q^*dy+\int R^*dz+K$

Q^* : جملات فاقد x در Q (مشتق Q نسبت به x صفر باشد)

R^* : جملات فاقد x و y در R

$$f(x,y,z)=\int y^2z^3\,dx+\int 0\,dy+\int 0\,dz+K=xy^2z^3+K$$

در اینجا $Q^*=0$ چون در Q عبارت فاقد x نداریم $\Leftarrow$ $Q^*=0$

در اینجا $R^*=0$ چون در R جملات فاقد x و y نداریم

میدان‌های برداری خاص

اگر دامنه میدان $\vec{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ برابر $\mathbb{R}^n$ نباشد ولی $\operatorname{curl}\vec{F}=\vec{0}$ ممکن است $\vec{F}$ پایستار باشد یا نباشد. ~~در صورت پایستار بودن آنگاه~~ می‌توان نوشت

$$f(x,y,z)=\int P\,dx+\int Q^*\,dy+\int R^*\,dz$$

Q^*: جملات یا عبارات فاقد x (مشتق آن عبارت نسبت به x صفر باشد)

R^*: جملات یا عبارات فاقد x و y (مشتق آن عبارت نسبت به x و y صفر باشد) $\frac{\partial R^*}{\partial y\,\partial x}=0$

داریم $\vec{F}=\nabla f$. حال چنانچه دامنه f برابر با دامنه $\vec{F}$ باشد آنگاه $\vec{F}$ پایستار و f تابع پتانسیل است و در غیر این صورت $\vec{F}$ پایستار نیست.

۱) برای میدان $\vec{F}(x,y)=\left\langle \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{P}, \underbrace{\frac{y}{x^2+y^2}}_{Q}\right\rangle$ دامنه برابر با $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ است و داریم

یادآوری

$$\boxed{\operatorname{curl}\vec{F}=\vec{0} \Longleftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}}$$

داریم $\underbrace{\operatorname{curl}\vec{F}=\vec{0}}_{\text{در حالت دو بعدی}}$ یعنی $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

$$f(x,y)=\int P\,dx+\int \underbrace{Q^*}_{\text{جملات فاقد } x \text{ در } Q}dy=\int \frac{x}{x^2+y^2}\,dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$$

$D_f=\mathbb{R}^2-\{0,0\}$

چون $D_f=D_F$ و $\nabla f=F$ پس $\vec{F}$ پایستار است و f تابع پتانسیل است.

۲) برای میدان $\vec{F}(x,y)=\left\langle \underbrace{\frac{-y}{x^2+y^2}}_{P}, \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{Q}\right\rangle$ دامنه برابر $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ است

داریم $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ یعنی $\operatorname{curl}\vec{F}=\vec{0}$ و

$$f(x,y)=\int \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx+\int \underbrace{0}_{Q^*}\,dy=\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

و می‌دانیم که $\tan^{-1}\frac{y}{x}=\theta$. اگر θ را زاویه در مختصات قطبی بگیریم یعنی $\tan\theta=\frac{y}{x}$ آنگاه $\nabla\theta=\vec{F}$ اما چون دامنه θ برابر است با $\mathbb{R}^2-\{\text{محور } y\}$ است و با دامنه $\vec{F}$ برابر نیست پس $\vec{F}$ الزاماً پایستار نمی‌باشد.

محور y یعنی $x=0$

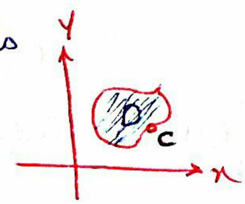
مثال ۴ ص 137: اگر $\vec{F}(x,y,z)=\underbrace{xz}_{P}\vec{i}+\underbrace{xyz}_{Q}\vec{j}-\underbrace{y^2}_{Z}\vec{k}$ ، $div\vec{F}$ را بیابید.

حل:
$$div\vec{F}=\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=\frac{\partial}{\partial x}(\underbrace{xz}_{P})+\frac{\partial}{\partial y}(\underbrace{xyz}_{Q})+\frac{\partial}{\partial z}(\underbrace{-y^2}_{R})=z+xz+0=z+xz$$

قضیه گرین

اکنون می خواهیم ارتباط انتگرال خط و انتگرال دوگانه را بیان کنیم. این کار با قضیه گرین صورت می گیرد.

قضیه گرین: فرض کنید C منحنی ای بسته و ساده، تکه ای هموار و جهت دار مثبت در صفحه باشد (در جهت مثلثاتی) و D ناحیه محدود به C باشد. اگر P و Q روی ناحیه ای باز که D را در بر دارد دارای مشتق های جزئی (مرتبه اول) پیوسته باشند، آنگاه



$$\oint_C P\,dx+Q\,dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA$$

منحنی یعنی C بسته، ساده، تکه ای هموار است در جهت مثبت

* منظور از انتگرال دوگانه در اینجا روشهای انتگرال گیری نوع اول، دوم یا قطبی است.
* اگر منحنی C در شرایط قضیه گرین صدق کند $\oint_C F\cdot dr$ را با $\oint_C F\cdot dr$ در ناحیه نمایش می دهند.

صورت های دیگر از قضیه گرین

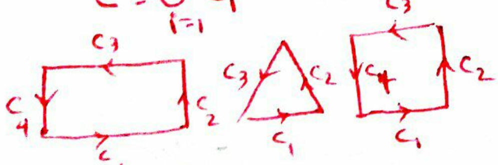
$$\boxed{\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\oint_C P\,dx+Q\,dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA}$$

که $\vec{F}=\langle P,Q\rangle$

توجه ۱: منظور از منحنی هموار یعنی منحنی C در صفحه یا فضا هموار گوییم هرگاه (روی بازه I) $|\vec{r}'(t)|\neq 0$ یعنی $\frac{dx}{dt}$ و $\frac{dy}{dt}$ ، $\frac{dz}{dt}$ همزمان صفر نشوند.

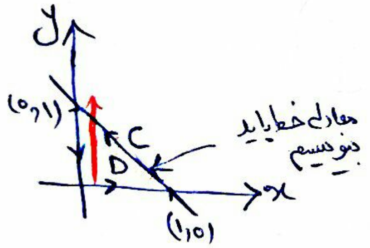
توجه ۲: منحنی C را قطعه-قطعه یا تکه ای هموار گوییم هرگاه اجتماع تعداد متناهی منحنی هموار باشد.

$$C=\bigcup_{i=1}^{n}C_i$$



این شکل ها تکه ای هموار هستند.

مثال امت 1361 $\int_C \underbrace{x^4}_{P} dx + \underbrace{xy}_{Q} dy$ را که در اینجا C منحنی مثلثی‌ای که از پاره خط‌های از $(0,0)$ تا $(1,0)$ از $(1,0)$ تا $(0,1)$ و از $(0,1)$ تا $(0,0)$ تشکیل شده است، حساب کنید



حل: شکل (حتماً شکل رسم شود زیرا در انتگرال دوگانه (نوع ناحیه) نیاز داریم)

معادله خط گذرنده از نقطه (۱و۰) و (۰و۱)

$$y - 0 = \frac{1-0}{0-1}(x-1)$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 1-x}$$

منحنی C بسته است و ساده. شرایط قضیه گرین برقرار است. انتگرال خط را با قضیه گرین حل می‌کنیم

P و Q روی D دارای مشتق جزئی مرتبه اول پیوسته هستند

P: ضریب dx

Q: ضریب dy

$$\oint_C P\,dx + \oint Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial x} = y \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

برای انتگرال دوگانه از ناحیه نوع اول استفاده می‌کنیم

$dA = dy\,dx$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \underbrace{(y-0)}_{y}\, dy\, dx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1-x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2\, dx$$

توجه: $\int (ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^2}{2} + C$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{(1-x)^3}{3}\right)\Big]_0^1 = \frac{-1}{2}\left[\frac{0-(1-0)^3}{3}\right] = \frac{1}{6}$$

توجه ۱: اگر این مسأله را با انتگرال خط حل می‌کردیم روی سه مسیر C_1، C_2، C_3 باید حل میکردیم که تعداد مراحل آن بیشتر بود و اکنون با قضیه گرین ساده‌تر حل کردیم. $\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3}$

توجه ۲: اگر منحنی C بسته باشد و شرایط قضیه گرین برقرار باشد از قضیه گرین انتگرال خط را حل می‌کنیم وقت داشته باشیم که گاهی هم محاسبه انتگرال خط ساده‌تر است.

انتگرال خط فرم‌های مقابل هستند

① $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ② $\int P\,dx + Q\,dy$

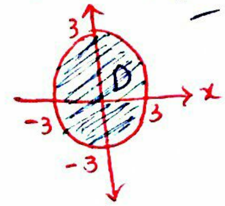
$\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ یا $\vec{F} = P\,dx + Q\,dy$

مثال ۲ و 1362

$\oint_C \underbrace{(3y-e^{\sin x})}_{P}dx+\underbrace{(7x+\sqrt{y^4+1})}_{Q}dy$ را که در اینجا $x^2+y^2=9$ و

است حساب کنید.

حل:



ناحیه D محدود به C، $x^2+y^2\le 9$ است

بنابراین ناحیه C بسته است و قضیه گرین برقرار است

شرایط

ناحیه D . (محصور داخل دایره با عبارت $x^2+y^2=9$ ← مختصات قطبی)

* انتگرال خط فوق را با قضیه گرین حل می‌کنیم *

$$\oint_C (3y-e^{\sin x})dx+(7x+\sqrt{y^4+1})dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA$$

در اینجا $dA=r\,dr\,d\theta$ و $0\le r\le 3$ و $0\le\theta\le 2\pi$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=7,\qquad \frac{\partial P}{\partial y}=3$$

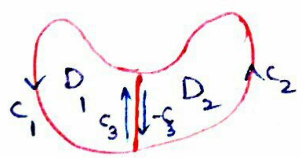
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^3 \underbrace{(7-3)r}_{4r}\,dr\,d\theta$$

$$=\underbrace{\int_0^{2\pi}d\theta}_{2\pi}\int_0^3 4r\,dr=2\pi\left[\frac{4r^2}{2}\right]_0^3=4\pi[9-0]=\boxed{36\pi}$$

توجه: در قضیه گرین قید شده بود که D ساده است

اکنون می‌خواهیم قضیه گرین را به حالتی که D اجتماع متناهی از ناحیه‌های ساده است تعمیم دهیم

با توجه به شکل زیر:



$D=D_1\cup D_2$

دقت شود مرز D_1 ← $C_1\cup C_3$

مرز D_2 ← $C_2\cup(-C_3)$

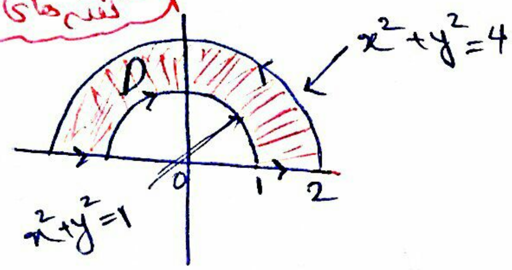
⇐ $C=C_1\cup C_2$ (C_3 و $-C_3$ باهم از بین می‌روند)

$$\boxed{\int_{C_1\cup C_2} P\,dx+Q\,dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA}$$

قضیه گرین برای اجتماع متناهی از ناحیه ساده

مثال 4 ص 1364 اگر در اینجا c مرز نیم طوقه D در نیم صفحه بالایی بین دایره‌های $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=4$ است، حساب کنید $\oint_C \underbrace{y^2}_{P}dx+\underbrace{3xy}_{Q}\,dy$

ناحیه D مشابه شکل‌های قبل است



حل:

$$D=\{(r,\theta) \mid 1\le r\le 2 \ ,\ 0\le\theta\le\pi\}$$

قید کرده که نیم صفحه بالایی

محدود به عبارت $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=1$ ← مختصات قطبی

$$\oint_C y^2dx+3xy\,dy=\iint_D\left(\frac{\partial}{\partial x}(3yx)-\frac{\partial}{\partial y}(y^2)\right)dA$$

$\boxed{dA=r\,dr\,d\theta}$ مختصات قطبی

$$=\iint_D(\underbrace{3y-y}_{y})\,dA$$

$$=\int_0^\pi\int_1^2(r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta=\int_0^\pi\sin\theta\,d\theta\int_1^2 r^2dr$$

$$=\left[-\cos\theta\right]_0^\pi\left[\frac{r^3}{3}\right]_1^2=\Big[\underbrace{-(-1-1)}_{2}\Big]\Big[\underbrace{\frac{2^3}{3}-\frac{1}{3}}_{\frac{7}{3}}\Big]$$

$$=\boxed{\frac{14}{3}}$$

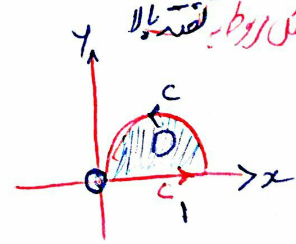
مثال 5 ص 1365 اگر $F(x,y)=\dfrac{-y\vec{i}+x\vec{j}}{x^2+y^2}$، نشان دهید که به ازای هر مسیر ساده مانند c که جهت مثبت دارد و مبدأ را در بر دارد $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=2\pi$

... باشد در درون C قرار داشته باشد

در صورت مسأله اگر O (مبدأ) در درون C نباشد آنگاه چون $(0,0) \notin D$ بنابراین F بر D مشتق‌پذیر است و بنابر قضیه گرین:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \\[2ex] \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)} \end{cases} \Rightarrow \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = 0$$

شکل مربوط به قسمت بالا

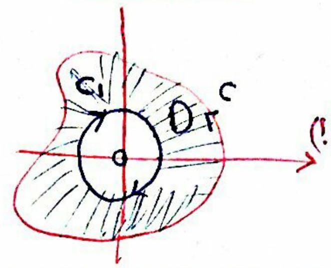


گام ①

حل مثال: شکل ←

نقطه $(0,0)$ مشکل ایجاد می کند (چرا؟)

نقطه $(0,0)$ را باید کنار بگذاریم



گام ②

عددی مانند a می توان یافت، طوری که دایره به مرکز O و شعاع a کلاً در اینجا a را آنقدر کوچک انتخاب می کنیم که C' درون C قرار بگیرد.

D ناحیه محدود به C و C' است.

گام ③

دیگر مبدأ به درون $C \cup C_1$ متعلق نیست و می توان از قضیه گرین مانند حالت الف استفاده کرد.

$$\Rightarrow \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_{C_1 \cup C} \vec{F}\cdot d\vec{r} - \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

تفسیر گرین

$$\Rightarrow \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 - \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

با پارامتر سازی $\vec{r}(t) = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j}$

$0 \leq t \leq 2\pi$ ← داریم

می دانیم $\boxed{\begin{array}{l} \vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} \\ x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{array}}$

$$\int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} F(\vec{r}(t))\cdot \vec{r}'(t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\overset{y}{(-a\sin t)}\overset{dx}{(-a\sin t)} + \overset{x}{(a\cos t)}\overset{dy}{(a\cos t)}}{\underbrace{a^2\cos^2 t}_{x^2} + \underbrace{a^2\sin^2 t}_{y^2}}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

نکات مربوط به حل این مثال

1- با حل انتگرال این نکته را متذکر می شویم که قضیه گرین برای ناحیه هایی که حفره دارند نیز می توان با استراتژی بالا حل کرد.

2- به اشتباه نباید همان اول قضیه گرین را استفاده می کردیم زیرا به جواب صفر می رسیدیم. زیرا داریم:

برای ب

$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}}$ ← مثال

3- در برخی مسائل برای میدان برداری $\vec{F}$ صورت مسائل علاوه بر $6\,F(x,y) = P\,\underline{dx} + Q\,\underline{dy}$

به صورت $\underbrace{F = P\vec{\underline{i}} + Q\vec{\underline{j}}}$ نیز می باشد

4- در برخی مسائل با اندکی تغییر در مسیرها به صورت $\int_{C\cup C_1} - \int_{C_1}$ ، منحنی مورد نظر روی $C\cup C_1$ بسته می‌شود و می‌توان روی این مسیر قضیه گرین استفاده کرد.

کاربرد قضیه گرین در محاسبه مساحت

$$\text{مساحت } A = \underset{1}{\oint_C x\,dy} = \underset{2}{-\oint_C y\,dx} = \underset{3}{\frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx} = \iint_D dA$$

$$\iint_D dA : \begin{cases} P=0,\ Q=x & 1 \\ Q=0,\ P=y & 2 \\ P=-\frac{1}{2}y,\ Q=\frac{1}{2}x & 3 \end{cases}$$

مثال 3) (1363) مساحت محصور بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ را بیابید.

حل: معادله بیضی ⟵ فرم پارامتری

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \quad 0\le t\le 2\pi$$

$$\text{مساحت } A = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\cos t)(b\cos t)\,dt - (b\sin t)(-a\sin t)\,dt$$

$$ab\cos^2 t + ab\sin^2 t \qquad ab\underbrace{(\cos^2 t+\sin^2 t)}_{1}$$

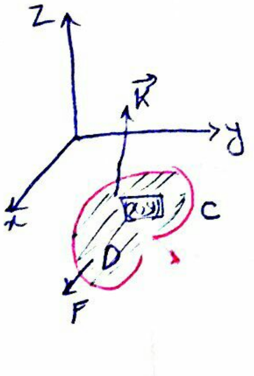
$$= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt = \boxed{\pi ab}$$

* با هرکدام از هر سه فرمول گفته شده در بالا می‌توان مساحت ناحیه مورد نظر را یافت.

صورت برداری قضیه گرین (ارتباط قضیه گرین با $\text{curl}\,\vec F$ و $\text{div}\,\vec F$)

فرض می‌کنیم ناحیه مسطح D، منحنی مرزی‌اش C و تابع‌های P و Q در شرایط قضیه گرین صدق کنند.

اکنون میدان برداری $\vec F = P\vec i + Q\vec j$ را در نظر می‌گیریم.



- انتگرال خط برابر است با $\oint_C \vec F\cdot d\vec r = \oint_C P\,dx + Q\,dy$

اگر $\vec F$ را میدان برداری روی R^3 در نظر بگیریم که مولفه‌اش صفر است آنگاه

$$\operatorname{curl}\vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x,y) & Q(x,y) & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \operatorname{curl}\vec{F}\cdot\vec{k} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}\cdot\vec{k} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

ضرب داخلی

قضیه گرین را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد

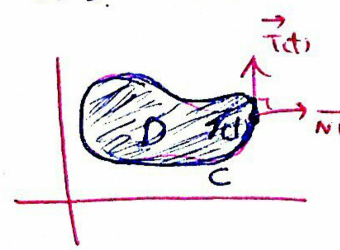
$$\boxed{1} \quad \boxed{\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_D (\operatorname{curl}\vec{F})\cdot\vec{k}\,dA = \underbrace{\iint_D (\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot\vec{k}\,dA}_{\text{چرخش}}}$$

حالت دیگر از صورت برداری قضیه گرین را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

اگر C با معادله برداری $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ ، $a \le t \le b$ آنگاه بردار واحد مماس

$$\vec{T} = \vec{T}(t) = \frac{x'(t)}{|\vec{r}'(t)|}\vec{i} + \frac{y'(t)}{|\vec{r}'(t)|}\vec{j}$$

$$\vec{n} = \vec{n}(t) = \frac{y'(t)}{|\vec{r}'(t)|}\vec{i} - \frac{x'(t)}{|\vec{r}'(t)|}\vec{j}$$



چرا $\vec{n}(t)$ را به این فرم نوشتیم؟ $(\vec{T}\cdot\vec{n} = 0)$

$$\oint_C \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \int_a^b (\vec{F}\cdot\vec{n})(t)\,|\vec{r}'(t)|\,dt = \int_C P\,dy - Q\,dx = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)dA$$

بنا بر انتگرال خط نسبت به طول قوس

انتگرال خط نوع اول

قضیه گرین (جای P و Q نسبت به قبل عوض شده است)

از طرفی $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ ← دیورژانس F است (با این فرض که R=0)

$$\boxed{2} \Rightarrow \boxed{\oint_C \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \iint_D \operatorname{div}\vec{F}\,dA}$$

شار $\vec{F}$ گذرنده از C

نکته ۱: صورت برداری قائم قضیه گرین، صورت دوم برداری قضیه گرین است $\vec{n}$

نکته ۲: صورت برداری مماسی قضیه گرین، همان صورت اول برداری قضیه گرین است که $\vec{T}$

$$\hookrightarrow \oint_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds = \iint_D (\operatorname{curl}\vec{F})\cdot\vec{k}\,dA$$

۱- فرض کنید که $\vec{F} = \underbrace{y^3}_{P}\vec{i} + \underbrace{x^5}_{Q}\vec{j}$ انتگرال مولفه قائم $\vec{F}$ حول مربع یکه را حساب کنید

حل: $$\int_C \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \iint_D \operatorname{div}\vec{F}\,dA = \iint_D \Big(\underbrace{\frac{\partial P}{\partial x}}_{0} + \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial y}}_{0}\Big)\,dx\,dy = \iint 0\,dA = 0$$

صورت برداری دوم قضیه گرین

۲- هرگاه $\vec{F}(x,y) = \underbrace{x^2}_{P}\vec{i} + \underbrace{y^2}_{Q}\vec{j}$ ، C دایره $x^2+y^2=49$ و $\vec{n}$ بردار قائم یکه خارجی دایره مذکور باشد حاصل $\oint_C \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$ را بیابید.

حل: صورت برداری دوم قضیه گرین

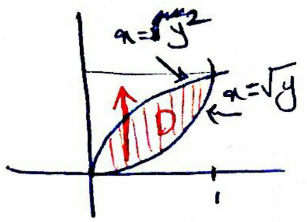
$$\oint \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \iint_D \operatorname{div}\vec{F}\,dA = \iint_D \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\Big)\,dA$$

ادامه با دانشجو

تمرین حل شده

تمرین 7 مث 1366 مطلوب است محاسبه انتگرال خط $\int_C (\underbrace{y+e^{\sqrt{x}}}_{P})dx+(\underbrace{2x+\cos y^2}_{Q})dy$

که C مرز ناحیه محصور به منحنی‌های $y=x^2$ و $x=y^2$ است.



حل: نقاط برخورد

$$y=x^2 \to y^2=x^4 \to x=x^4 \to x^4-x=0 \to x(x^3-1)=0 \Rightarrow x=0,1$$

شرایط قضیه گرین برقرار است.
پس انتگرال خط فوق را با قضیه گرین حل می‌کنیم

$$\int_C (y+e^{\sqrt{x}})dx+(2x+\cos y^2)dy=\iint_D \_\_\_\_$$

$$=\iint_D\Big[\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(2x+\cos y^2)}_{2\times 1}-\underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(y+e^{\sqrt{x}})}_{1}\Big]dA=\int_0^1\int_{y^2}^{\sqrt{y}} 2\,dx\,dy$$

$$=\int_0^1 \Big[2\boxed{x}\Big]_{x=y^2}^{x=\sqrt{y}}dy=\int_0^1(\sqrt{y}-y^2)\,dy=\Big[\frac{2}{3}y\sqrt{y}-\frac{y^3}{3}\Big]_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}$$

$$=\boxed{\frac{1}{3}}$$

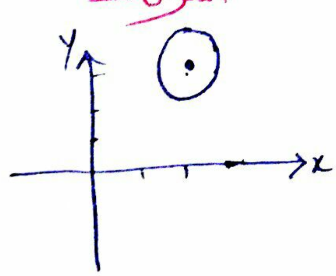
نکته: ناحیه‌ای که مرز بالا که از دو منحنی که منحنی C بسته را تشکیل می‌دهد ← قضیه گرین

دقت: منحنی C که مرز بیضی - دایره - مثلث - مستطیل - مربع - مرز بین دو دایره و محصور بین دو منحنی مانند تمرین 7 که شرط برقراری قضیه گرین ← منحنی های بسته هستند

تمرین 14 مث 1366 اگر $F(x,y)=\langle \underbrace{y-\ln(x^2+y^2)}_{P}, \underbrace{2\tan^{-1}\frac{y}{x}}_{Q}\rangle$ و C دایره $(x-2)^2+(y-3)^2=1$ که جهتش پاد ساعتگرد است. مطلوب است $\oint \vec{F}\cdot d\vec{r}$

انتگرال خط

حل: منحنی C دایره ای به مرکز (3 و 2) و شعاع یک که منحنی بسته است.



$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_D\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(2\tan^{-1}\frac{y}{x}\Big)-\frac{\partial}{\partial y}\big(y-\ln(x^2+y^2)\big)\Big]dA$$

$$=\iint_D\Bigg[\frac{-2\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}-\Big(1-\frac{2y}{x^2+y^2}\Big)\Bigg]dA$$

$$=\iint_D\frac{-2y-x^2-y^2+2y}{y^2+x^2}\,dA=-\underbrace{\iint_D dA}_{\text{مساحت } D}=-(\pi \underbrace{r^2}_{1})=-\pi$$

سوال امتیازی:

مقدار انتگرال $\oint y^2 dx + x^2 dx$ که در آن c نیم بالایی بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

پیموده شده است در جهت خلاف عقربه‌های ساعت می باشد کدام است.