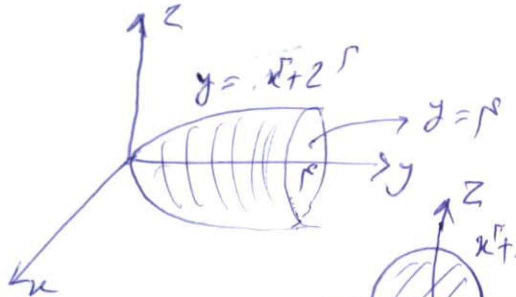
نوشتن حدودهای انتگرال سه گانه در مختصات دکارتی

می دانیم که برای محاسبه انتگرال سه گانه روی ناحیه بسته D در مختصات دکارتی می توان شش انتگرال سه گانه نوشت مخصوصاً اگر D یک ناحیه ساده باشد یعنی ناحیه D یک ناحیه z-ساده و y-ساده و x-ساده باشند
نوشتن حدود این شش انتگرال سه گانه را در مثال های زیر شرح می دهیم

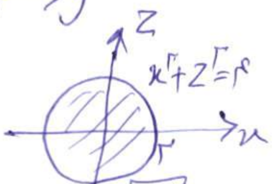
مثال (۱) فرض کنید که D ناحیه محصور بین رویه $y=x^2+z^2$ و $y=4$ است. هر شش انتگرال سه گانه تابع $f(x,y)=\sqrt{x^2+z^2}$ را روی این ناحیه را بنویسید.



حل: D یک y-ساده است زیرا

$x^2+z^2\le y\le 4$

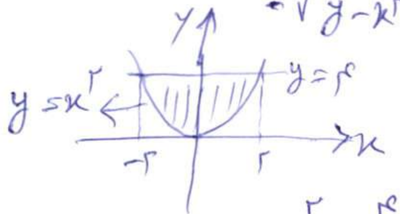
و تصویر D در صفحه zox دایره $x^2+z^2=4$ است.



$$\iiint_D \sqrt{x^2+z^2}\,dD = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}}\int_{x^2+z^2}^{4}\sqrt{x^2+z^2}\,dy\,dx\,dz = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x^2+z^2}^{4}\sqrt{x^2+z^2}\,dy\,dz\,dx$$

D یک ناحیه z-ساده است یعنی $-\sqrt{y-x^2}\le z\le\sqrt{y-x^2}$

و تصویر D در صفحه xoy به صورت مقابل است.

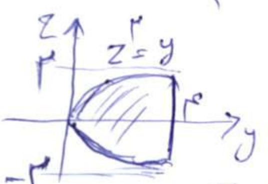


$$\iiint_D\sqrt{x^2+z^2}\,dD=\int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}\int_{-\sqrt{y-x^2}}^{\sqrt{y-x^2}}\sqrt{x^2+z^2}\,dz\,dy\,dx=\int_0^4\int_{-\sqrt y}^{\sqrt y}\int_{-\sqrt{y-x^2}}^{\sqrt{y-x^2}}\sqrt{x^2+z^2}\,dz\,dx\,dy$$

D یک ناحیه x-ساده است زیرا

$-\sqrt{y-z^2}\le x\le\sqrt{y-z^2}$

و تصویر D در صفحه yoz به صورت مقابل است.

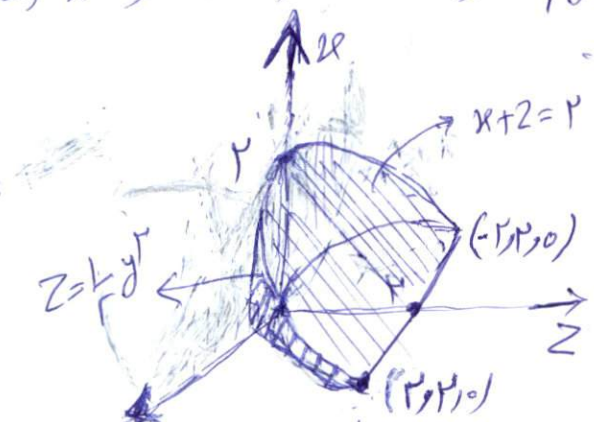


$$\iiint_D\sqrt{x^2+z^2}\,dD=\int_{-2}^{2}\int_{z^2}^{4}\int_{-\sqrt{y-z^2}}^{\sqrt{y-z^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz=\int_0^4\int_{-\sqrt y}^{\sqrt y}\int_{-\sqrt{y-z^2}}^{\sqrt{y-z^2}}\sqrt{x^2+z^2}\,dx\,dz\,dy$$

برای حل این انتگرال ها، انتگرال $I=\iiint_D\sqrt{x^2+z^2}\,dD$ وقتی که D را یک ناحیه y-ساده در نظر بگیریم و در مختصات ... حل می کنیم
$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ z=r\sin\theta\\ y=y\end{cases}$

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{r^2}^4 r^2\,dy\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2[4-r^2]r^2\,dr=\frac{128}{15}\pi$$

مثال ۲. فرض کنید که D جسم محصور بین استوانه $z=\frac{1}{2}y^2$ و صفحات $x+z=2$ و $x=0$ است. هر شش انتگرال سه‌گانه‌ای که حجم D را محاسبه می‌کند را بنویسید.

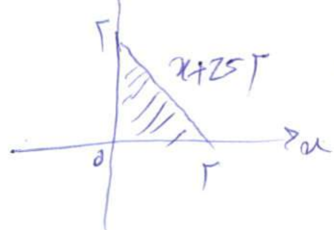


حل: D یک ناحیه z-ساده است
زیرا

$$\frac{1}{2}y^2 \le z \le 2-x$$

و تصویر D در صفحه xoy به صورت مقابل است.

$$\text{حجم} = \iiint_D dD = \int_0^2 \int_{-\sqrt{4-2x}}^{\sqrt{4-2x}} \int_{\frac{1}{2}y^2}^{2-x} dz\, dy\, dx = \int_{-2}^{2} \int_0^{2-\frac{1}{2}y^2} \int_{\frac{1}{2}y^2}^{2-x} dz\, dx\, dy$$

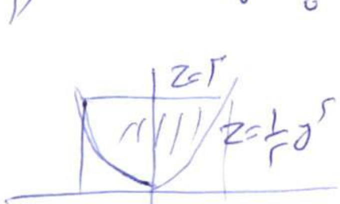


D یک ناحیه y-ساده است زیرا

$$-\sqrt{2z} \le y \le \sqrt{2z}$$

و تصویر D در صفحه xoz به صورت مقابل است.

$$\text{حجم} = \iiint_D dD = \int_0^2 \int_0^{2-x} \int_{-\sqrt{2z}}^{\sqrt{2z}} dy\, dz\, dx = \int_0^2 \int_0^{2-z} \int_{-\sqrt{2z}}^{\sqrt{2z}} dy\, dx\, dz$$



D یک ناحیه x-ساده است

$$0 \le x \le 2-z$$

و تصویر D در صفحه yoz به صورت مقابل است.

$$\text{حجم} = \iiint_D dD = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \int_0^{2-z} dx\, dy\, dz = \int_{-2}^{2} \int_{\frac{1}{2}y^2}^{2} \int_0^{2-z} dx\, dz\, dy =$$

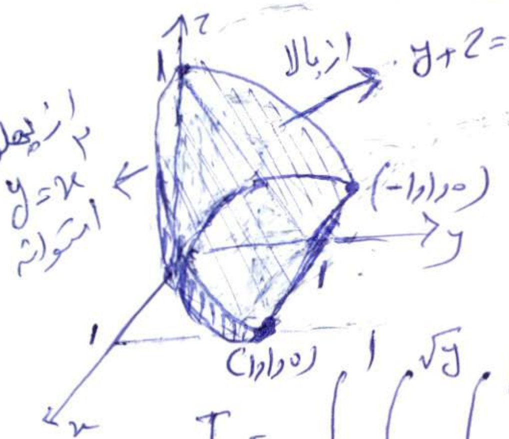
$$= \int_{-2}^{2} \int_{\frac{1}{2}y^2}^{2} [x]_0^{2-z}\, dz\, dy = \int_{-2}^{2} \int_{\frac{1}{2}y^2}^{2} (2-z)\, dz\, dy = \int_{-2}^{2} \left[2z - \frac{z^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}y^2}^{2} dy$$

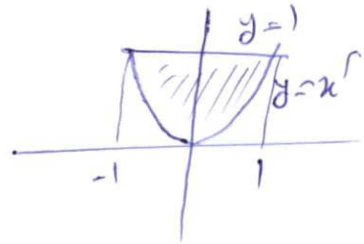
$$= \int_{-2}^{2} \left[2 - y^2 + \frac{1}{8}y^4\right] dy = \left[2y - \frac{y^3}{3} + \frac{1}{40}y^5\right]_{-2}^{2} = \left(4 - \frac{8}{3} + \frac{32}{40}\right) - \left(-4 + \frac{8}{3} - \frac{32}{40}\right)$$

$$= \frac{64}{15}$$ واحد مکعب

مثال ۳: ناحیه انتگرال‌گیری $I=\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}\int_{0}^{1-y} dz\,dy\,dx$ را رسم کنید و ۵ انتگرال سه‌گانه معادل آن را بنویسید و سپس جواب آن را بدست آورید.

حل: چون $0\le z\le 1-y$ و $x^2\le y\le 1$ و $-1\le x\le 1$ پس ناحیه انتگرال z ساده است و با صورت زیر رسم می‌کنیم.

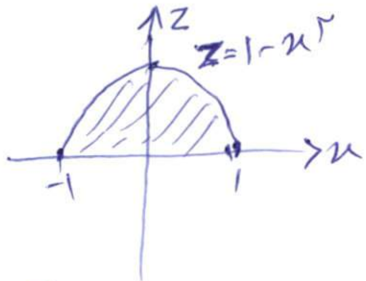




تصویر ناحیه در صفحه xoy

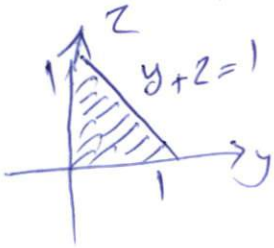
$$I=\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\int_{0}^{1-y} dz\,dx\,dy$$

ناحیه انتگرال‌گیری y- ساده هم است و تصویر آن در صفحه zox به صورت مقابل است



و $x^2\le y\le 1-z$

$$I=\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2}\int_{x^2}^{1-z} dy\,dz\,dx=\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-z}}\int_{x^2}^{1-z} dy\,dx\,dz$$



ناحیه انتگرال‌گیری x- ساده هم است و تصویر در صفحه yoz مثلث مقابل است

و $-\sqrt{y}\le x\le \sqrt{y}$

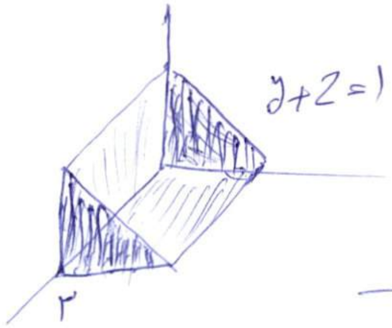
$$I=\int_{0}^{1}\int_{0}^{1-z}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\,dy\,dz=\int_{0}^{1}\int_{0}^{1-y}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\,dz\,dy$$

$$I=\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}\int_{0}^{1-y} dz\,dy\,dx=\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}[1-y]\,dy\,dx=\int_{-1}^{1}\left[y-\frac{1}{2}y^2\right]_{x^2}^{1}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}-x^2+\frac{1}{2}x^4\right]dx=\left[\frac{1}{2}x-\frac{x^3}{3}+\frac{1}{10}x^5\right]_{-1}^{1}=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}\right)$$

$$=2\left(\frac{15-10+3}{30}\right)=\frac{8}{15}$$ واحد مکعب

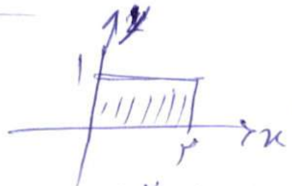
مثال ۴: اگر D ناحیه محصور بین صفحه $y+z=1$ و صفحات $x=2$ و $x=0$ و $z=0$ باشد، مطلوب است نوشتن هر شش انتگرال سه‌گانه‌ای که حجم را حساب می‌کند.



حل: D یک ناحیه z-ساده است زیرا

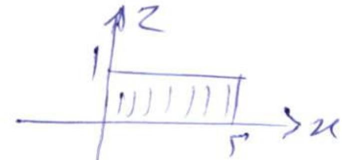
$0 \le z \le 1-y$

و تصویر D در صفحه xoy مستطیل مقابل است



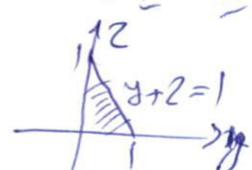
$$\text{حجم} = \int_0^1\int_0^2\int_0^{1-y} dz\,dx\,dy = \int_0^2\int_0^1\int_0^{1-z} dz\,dy\,dx$$

D یک ناحیه y-ساده است زیرا $0 \le y \le 1-z$ و تصویر آن در صفحه zox مستطیل زیر است



$$\text{حجم} = \int_0^1\int_0^2\int_0^{1-z} dy\,dx\,dz = \int_0^2\int_0^1\int_0^{1-z} dy\,dz\,dx$$

D یک ناحیه x-ساده است یعنی $0 \le x \le 2$ و تصویر آن در صفحه yoz مثلث زیر است



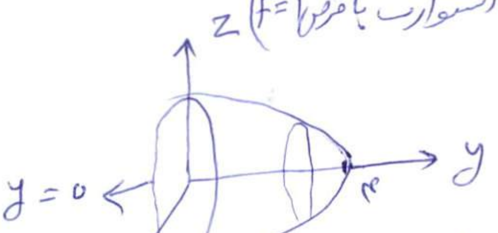
$$\text{حجم} = \int_0^1\int_0^{1-z}\int_0^2 dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^{1-y}\int_0^2 dx\,dz\,dy$$

$$\text{حجم} = \int_0^1\int_0^{1-y}\int_0^2 dx\,dz\,dy = \int_0^1\int_0^{1-y}[x]_0^2\,dz\,dy = 2\int_0^1[1-y]\,dy = 2\left[y-\frac{y^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= 2\left[1-\frac{1}{2}\right] = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

مثال ۵: اگر D جسم سه بعدی محدود با رویه‌های $y=4-x^2-4z^2$ و $y=0$ باشد هر شش انتگرال سه‌گانه که حجم درون D را می‌دهد بنویسید. (تمرین ۲۹ صفحه ۱۲۹۱ کتاب استوارت با فرض $f=1$)

حل: رویه $y=4-x^2-4z^2$ سهمیگون بیضوی است.



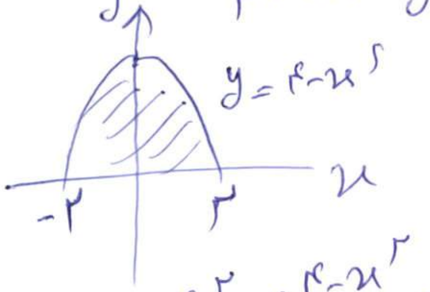
D یک ناحیه y-ساده است و تصویر D در صفحه zox یعنی $x^2+4z^2=4$ یعنی $\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{1}=1$ است و $0 \le y \le 4-x^2-4z^2$

$$\text{حجم} = \int_{-2}^{2}\int_{-\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}}\int_0^{4-x^2-4z^2} dy\,dz\,dx$$

$$\text{حجم} = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{4-4z^2}}^{\sqrt{4-4z^2}}\int_{0}^{4-x^2-4z^2} dy\, dx\, dz$$

D یک ناحیه z-ساده است زیرا $-\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2-y} \leq z \leq \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2-y}$

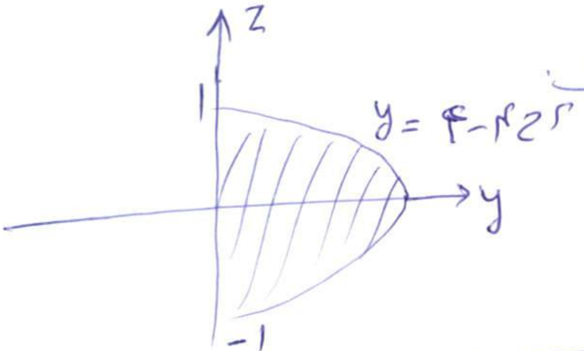
و تصویر D در صفحه xoy به صورت مقابل است



$$\text{حجم} = \int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2}\int_{-\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2-y}}^{\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2-y}} dz\, dy\, dx = \int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}}\int_{-\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2-y}}^{\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2-y}} dz\, dx\, dy$$

D یک ناحیه x-ساده است زیرا $-\sqrt{4-y-4z^2} \leq x \leq \sqrt{4-y-4z^2}$

و سایه D در صفحه yoz به صورت مقابل است

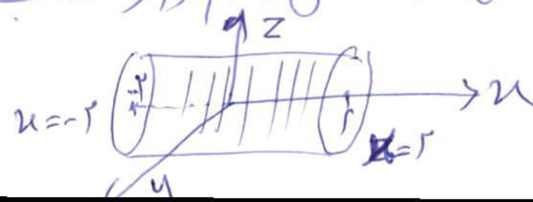


$$\text{حجم} = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{4-4z^2}\int_{-\sqrt{4-y-4z^2}}^{\sqrt{4-y-4z^2}} dx\, dy\, dz = \int_{0}^{1}\int_{-\frac{1}{2}\sqrt{4-y}}^{\frac{1}{2}\sqrt{4-y}}\int_{-\sqrt{4-y-4z^2}}^{\sqrt{4-y-4z^2}} dx\, dz\, dy$$

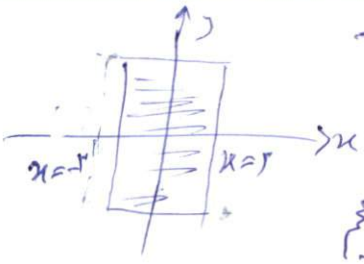
مثال ۶: اگر D ناحیه محصور بین استوانه $y^2+z^2=9$ و صفحات $x=-2$ و $x=2$ باشد هر شش انتگرال سه گانه‌ای که حجم D را حساب می‌کند بنویسید.

(تمرین $\frac{30}{1291}$ استوارت با فرض $a=4$)

حل:



توجه: محور x و محور y تعویض شده



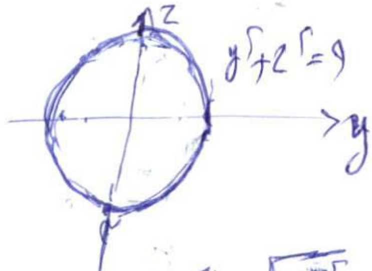
D یک ناحیه z-ساده است زیرا $-\sqrt{9-y^2} \le z \le \sqrt{9-y^2}$

و تصویر D در صفحه xoy مستطیل مقابل است:

$$\text{حجم} = \int_{-2}^{2}\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} dz\,dy\,dx = \int_{-3}^{3}\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} dz\,dx\,dy$$

D یک ناحیه ~~x~~-ساده است زیرا $-2 \le x \le 2$

و تصویر D در صفحه yoz دایره است (دایره مقابل)



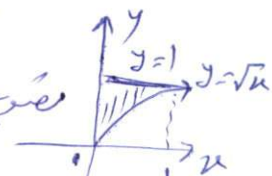
$$\text{حجم} = \int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-z^2}}^{\sqrt{9-z^2}}\int_{-2}^{2} dx\,dy\,dz = \int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}}\int_{-2}^{2} dx\,dz\,dy$$

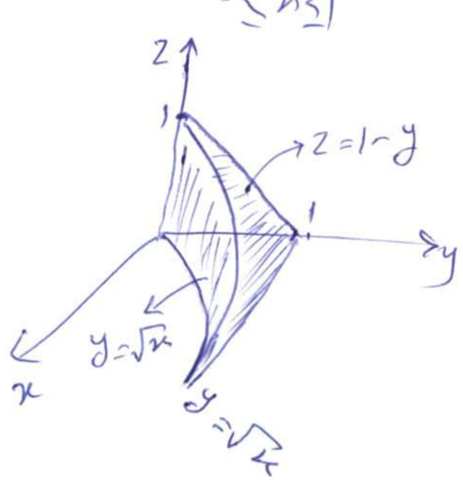
مثال ۷: ناحیه انتگرال گیری، انتگرال سه گانه زیر را رسم کنید و پنج انتگرال سه گانه معادل آن را بنویسید (تمرین ۳۳ استوارت ۱۳۹۱ با فرض f=1)

$\sqrt{x} \le y \le 1$ ، $0 \le z \le 1-y$: حل. $I=\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^{1}\int_0^{1-y} dz\,dy\,dx$

$0 \le x \le 1$

تصویر در صفحه xoy

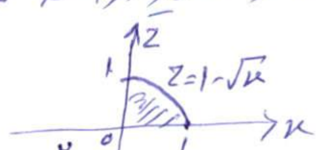




$$I=\int_0^1\int_0^{y^2}\int_0^{1-y} dz\,dx\,dy$$

ناحیه انتگرال گیری یک ناحیه y-ساده است زیرا

$\sqrt{x} \le y \le 1-z$ و تصویر در صفحه xoz به صورت مقابل است



$z=1-\sqrt{x}$

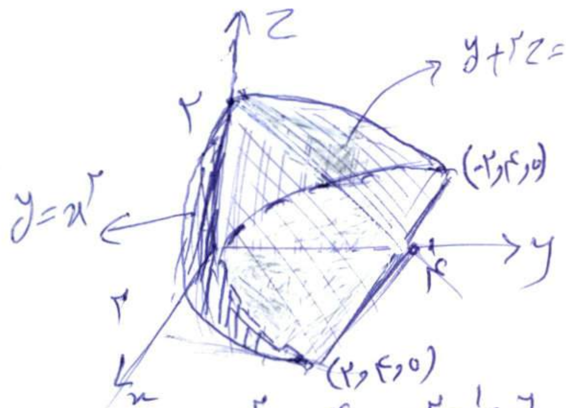
$$I=\int_0^1\int_0^{1-\sqrt{x}}\int_{\sqrt{x}}^{1-z} dy\,dz\,dx = \int_0^1\int_0^{(1-z)^2}\int_{\sqrt{x}}^{1-z} dy\,dx\,dz$$

ناحیه انتگرال گیری یک ناحیه x-ساده است زیرا $0 \le x \le y^2$

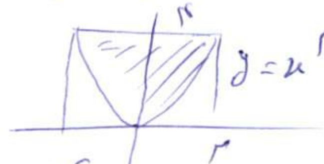
تصویر در صفحه yoz مثلث است

$$I=\int_0^1\int_0^{1-z}\int_0^{y^2} dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^{1-y}\int_0^{y^2} dx\,dz\,dy$$

مثال ۸: فرض کنید که D ناحیه محدود به استوانه $y=x^2$ و صفحات $z=0$ و $y+2z=4$ باشد. هر شش انتگرال سه گانه ای که حجم درون D را می دهند بنویسید.
(تمرین $\frac{31}{1291}$ استوارت با فرض $f=1$)

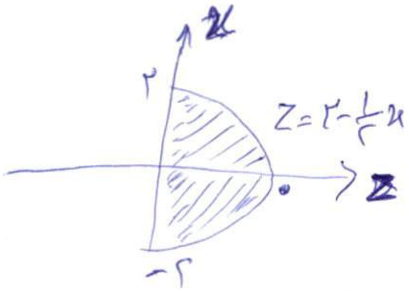


حل: D یک ناحیه z-ساده است زیرا $0 \le z \le 2-\frac{1}{2}y$ و تصویر آن در صفحه xoy به صورت زیر است



$$\text{حجم} = \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}\int_{0}^{2-\frac{1}{2}y} dz\,dy\,dx = \int_{0}^{4}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\int_{0}^{2-\frac{1}{2}y} dz\,dx\,dy$$

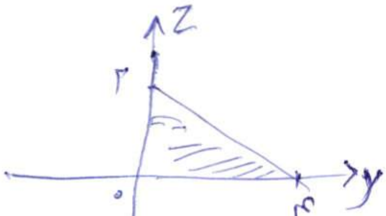
D یک ناحیه y-ساده است زیرا $x^2 \le y \le 4-2z$ و تصویر D در صفحه xoz به صورت مقابل است.



$z=2-\frac{1}{2}x^2$

$$\text{حجم} = \int_{-2}^{2}\int_{0}^{2-\frac{1}{2}x^2}\int_{x^2}^{4-2z} dy\,dz\,dx = \int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{4-2z}}^{\sqrt{4-2z}}\int_{x^2}^{4-2z} dy\,dx\,dz$$

D یک ناحیه x-ساده است زیرا $-\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y}$ و تصویر D در صفحه yoz به صورت (مثلث) مقابل است



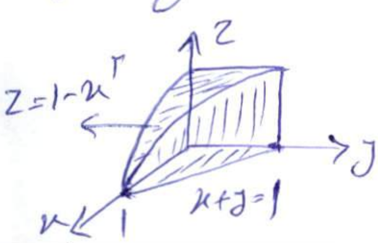
$$\text{حجم} = \int_{0}^{2}\int_{0}^{4-2z}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\,dy\,dz = \int_{0}^{4}\int_{0}^{2-\frac{1}{2}y}\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\,dz\,dy$$

مثال ۹: ناحیه انتگرال گیری، انتگرال $\int_0^1\int_0^{1-x^2}\int_0^{1-x} dy\,dz\,dx$ را رسم کنید و پنج انتگرال معادل آن را بنویسید.
(تمرین $\frac{34}{1291}$ استوارت با فرض $f=1$)

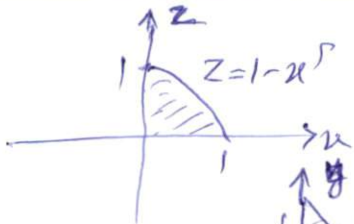
حل: ناحیه انتگرال گیری y-ساده است.

$0 \le y \le 1-x$ و $0 \le x \le 1$

$0 \le z \le 1-x^2$

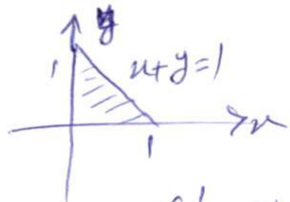


$$I=\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-z}}\int_0^{1-x} dy\,dx\,dz$$



تصویر D در صفحه xoz به صورت مقابل است

D یک ناحیه z-ساده است زیرا $0 \le z \le 1-x^2$

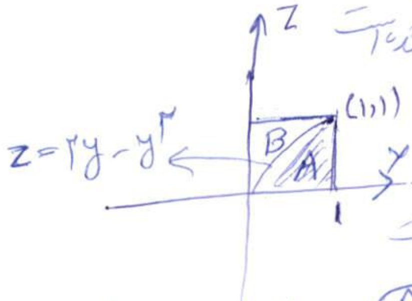


و تصویر D در صفحه xoy مثلث مقابل است

$$I=\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x^2} dz\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^{1-y}\int_0^{1-x^2} dz\,dx\,dy=\frac{5}{12}$$

D یک ناحیه x-ساده نیست زیرا D از دو ناحیه x-ساده تشکیل شده است

$0\le x\le 1-y$ و $0\le x\le\sqrt{1-z}$



و تصویر D در صفحه yoz از دو قسمت A و B تشکیل شده است

$1-y=\sqrt{1-z}$ یا $1-z=(1-y)^2$

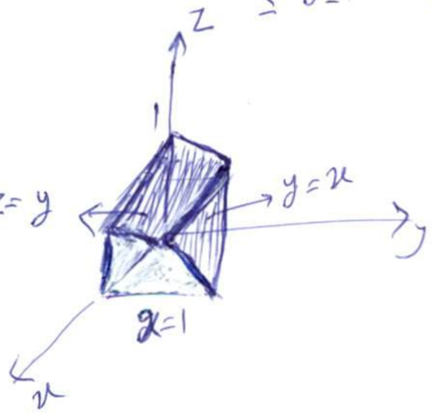
$z=1-(1-y)^2=2y-y^2$

$$I=\underbrace{\int_0^1\int_{1-\sqrt{1-z}}^1\int_0^{1-y} dx\,dy\,dz}_{A}+\underbrace{\int_0^1\int_0^{1-\sqrt{1-z}}\int_0^{\sqrt{1-z}} dx\,dy\,dz}_{B}=\frac{5}{12}$$

$$I=\underbrace{\int_0^1\int_0^{2y-y^2}\int_0^{1-y} dx\,dz\,dy}_{A}+\underbrace{\int_0^1\int_{2y-y^2}^1\int_0^{\sqrt{1-z}} dx\,dz\,dy}_{B}=\frac{5}{12}$$

مثال ۱۰: ناحیه انتگرال گیری، انتگرال $I=\int_0^1\int_y^1\int_0^y dz\,dx\,dy$ را رسم کنید و سپس پنج انتگرال مشابه معادل آن را بنویسید. (تمرین $\frac{۳۵}{۱۳۹۱}$ استوارت با فرق $f=1$)

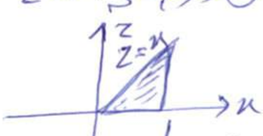
حل: $0\le z\le y$ و $y\le x\le 1$ و $0\le y\le 1$



$$I=\int_0^1\int_0^x\int_0^y dz\,dy\,dx$$

ناحیه انتگرال گیری y-ساده است زیرا $z\le y\le x$

و تصویر آن در صفحه zox به صورت زیر است



$$I=\int_0^1\int_0^x\int_z^x dy\,dz\,dx=\int_0^1\int_z^1\int_z^x dy\,dx\,dz$$

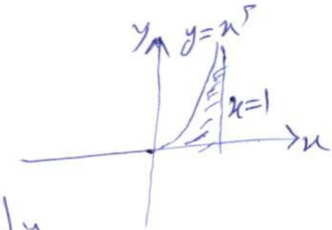
ناحیه انتگرال گیری x-ساده است $y\le x\le 1$

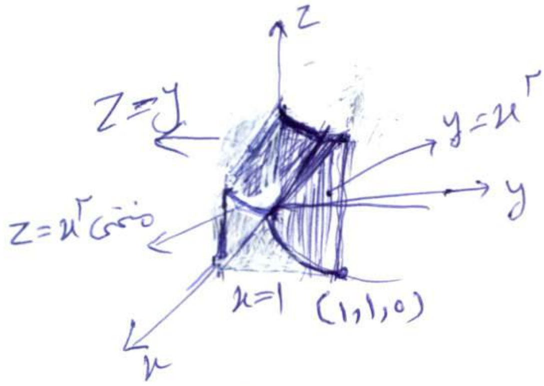
و تصویر در صفحه yoz به صورت مقابل است

$$I=\int_0^1\int_y^1\int_y^1 dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^y\int_y^1 dx\,dz\,dy$$

مثال ۱۱: ناحیه انتگرال گیری، انتگرال $I=\int_0^1\int_0^{x^2}\int_0^y dz\,dy\,dx$ را رسم کنید و پنج انتگرال مرتب شده معادل آن را بنویسید. (تمرین $\frac{36}{1391}$ استوارت با فرض $f=1$)

حل: $0\le z\le y$ و $0\le y\le x^2$ و $0\le x\le 1$





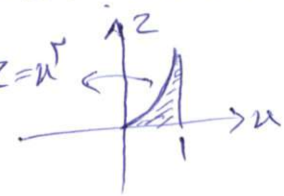
$$I=\int_0^1\int_{\sqrt y}^1\int_0^y dz\,dx\,dy$$

ناحیه انتگرال گیری یک ناحیه y-ساده است زیرا

$$z\le y\le x^2$$

تصویر در صفحه zox به صورت زیر است

$$I=\int_0^1\int_0^{x^2}\int_z^{x^2} dy\,dz\,dx = \int_0^1\int_{\sqrt z}^1\int_z^{x^2} dy\,dx\,dz$$

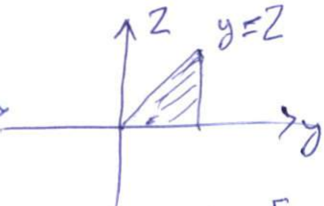


ناحیه انتگرال گیری یک ناحیه x-ساده است زیرا

$$\sqrt y\le x\le 1$$

و تصویر در صفحه y-z به صورت زیر است

$$I=\int_0^1\int_z^1\int_{\sqrt y}^1 dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^y\int_{\sqrt y}^1 dx\,dz\,dy$$

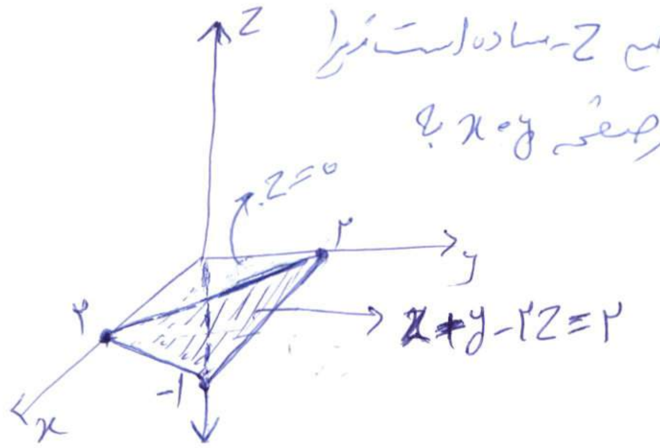


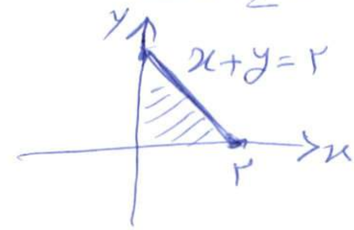
حل و جواب انتگرال سه گانه:

$$\int_0^1\int_0^{x^2}\int_0^y dz\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^{x^2}[z]_0^y\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^{x^2}y\,dy\,dx=\int_0^1\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{x^2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1[x^4]\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1=\frac{1}{10}$$

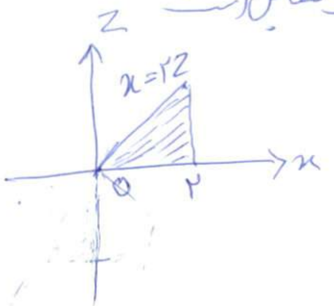
مثال ۱۲: (تمرین $\frac{۳۲}{۱۲۹۱}$ کتاب استوارت با فرض $f=1$) اگر D جسم محدود بین صفحات $x=2$ و $y=2$ و $z=0$ و $x+y-2z=2$ باشد حجم D را به کمک انتگرال سه گانه بیابید و هر شش انتگرال سه گانه را که حجم D را می‌دهد بنویسید. حل: D یک ناحیه z-ساده است زیرا $-1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y \le z \le 0$ و تصویر D در صفحه xoy به صورت زیر است





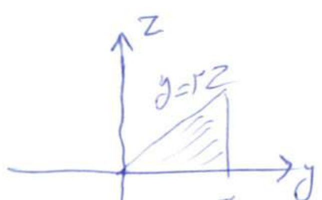
$$\text{حجم} = \int_0^2 \int_0^{2-y} \int_{-1+\frac{1}{2}(x+y)}^{0} dz\, dx\, dy = \int_0^2 \int_0^{2-x} \int_{-1+\frac{1}{2}(x+y)}^{0} dz\, dy\, dx$$

D یک ناحیه y-ساده است. زیرا $2-x+2z \le y \le 2$ و تصویر D در صفحه zox به صورت مقابل است



$$\text{حجم} = \int_0^1 \int_{2z}^{2} \int_{2-x+2z}^{2} dy\, dx\, dz = \int_0^2 \int_0^{\frac{1}{2}x} \int_{2-x+2z}^{2} dy\, dz\, dx$$

D یک ناحیه x-ساده است زیرا $2-y+2z \le x \le 2$ و تصویر D در صفحه yoz به صورت مقابل است.



$$\text{حجم} = \int_0^1 \int_{2z}^{2} \int_{2-y+2z}^{2} dx\, dy\, dz = \int_0^2 \int_0^{\frac{1}{2}y} \int_{2-y+2z}^{2} dx\, dz\, dy$$

حل انتگرال و محاسبه حجم

$$\int_0^1 \int_{2z}^{2} \int_{2-y+2z}^{2} dx\, dy\, dz = \int_0^1 \int_{2z}^{2} \left[\cancel{2}-\cancel{2}+y-2z\right] dy\, dz = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}y^2 - 2zy\right]_{2z}^{2} dz =$$

$$= \int_0^1 \left[2-4z-2z^2+4z^2\right] dz = \int_0^1 (2-4z+2z^2)\, dz = \left[2z-2z^2+\frac{2}{3}z^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

واحد مکعب