فصل ۵ تابعکهای خطی

تعریف: فرض کنید که V یک فضای برداری روی میدان F باشد. در این صورت تبدیل خطی $f: V \longrightarrow F$ را یک تابعک خطی می نامیم به عبارت دیگر

$$\forall \alpha, \beta \in V \text{ و } \forall c \in F \; : \; f(c\alpha+\beta) = c f(\alpha) + f(\beta)$$

توجه: میدان F روی F یک فضای برداری است بنابراین تبدیل خطی $f: V \longrightarrow F$ معنی پیدا می کند. مفهوم تابعک خطی در مطالعه فضای برداری باید متناهی مهم است زیرا در سازمان دادن و روشن کردن مبحث زیرفضاها، معادلات خطی و مختصات یاری دهنده است.

مثال ۱: فرض کنید که F یک میدان باشد و a_1 و a_2 و ... و a_n اسکالرهای از میدان F باشند تابع $f: F^n \longrightarrow F$ با ضابطه

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in F^n$ یک تابعک خطی است

چون $B = \{1\}$ یک پایه برای F است (پایه استاندارد) و $B' = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ پایه استاندارد برای F^n است که هر یک $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$ و $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ و ... و $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ در این صورت ماتریس نمایش این تابعک خطی نسبت به دو پایه B و B' عبارت است از $[f]_{B, B'} = A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ زیرا

$$\forall j = 1, 2, \dots, n \; : \; f(e_j) = a_j$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j$$

اگر $F = \mathbb{R}$ باشد آنگاه $F^n = \mathbb{R}^n$ در این صورت $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ عبارت است از $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ که در آن $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ دلخواه هستند.

مثال ۲: فرض کنید که $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ یک ماتریس $n \times n$ باشد. اثر این ماتریس را با $tr(A)$ نمایش می دهیم و $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ یعنی حاصلجمع اعضای روی قطر اصلی ماتریس A. بدیهی است که $tr: Mat_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابعک خطی است

$$\forall A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R}) \; : \; tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

زیرا

$\forall A, B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ و $\forall c \in \mathbb{R}$

$$tr(cA+B)=\sum_{i=1}^{n}(ca_{ii}+b_{ii})=c\sum_{i=1}^{n}a_{ii}+\sum_{i=1}^{n}b_{ii}=c\,tr(A)+tr(B)$$

بنابراین اثر یا tr یک تابعک خطی است.

مثال ۳: فرض کنید که $V=\mathbb{R}[x]$ مجموعه تمام چندجمله‌ای‌ها روی $\mathbb{R}$ و فرض کنید که $t\in\mathbb{R}$ دلخواه باشد. در این صورت

$L_t:\mathbb{R}[x]\longrightarrow\mathbb{R}$ یک تابعک خطی است

$$L_t(f(x))=f(t) \qquad \forall f(x)\in\mathbb{R}[x]$$

زیرا

$\forall f(x), g(x)\in\mathbb{R}[x]$, $\forall c\in\mathbb{R}$:

$$L_t(cf(x)+g(x))=c(f(t))+g(t)=$$
$$=cL_t(f(x))+L_t(g(x))$$

برای نمونه با فرض $t=\sqrt{2}$ داریم

$$L_{\sqrt{2}}:\mathbb{R}[x]\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$L_{\sqrt{2}}(f(x))=f(\sqrt{2})$$

مثال ۴: فرض کنید که $C[a,b]$ مجموعه تمام توابع حقیقی پیوسته روی $[a,b]$ باشد. در این صورت

$L:C[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ یک تابعک خطی است.

$$L(f(x))=\int_a^b f(x)dx \qquad \forall f(x)\in C[a,b]$$

زیرا

$\forall f(x), g(x)\in C[a,b]$, $\forall K\in\mathbb{R}$

$$L(Kf(x)+g(x))=\int_a^b[Kf(x)+g(x)]dx=K\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx=$$
$$=KL(f(x))+L(g(x))$$

تعریف: مجموعه تمام تابعک های خطی از فضای برداری V به میدان F را با $V^*=L(V,F)$ نمایش می دهیم و طبق فصل ۲ فضای برداری، مجموعه $V^*=L(V,F)$ یک فضای برداری روی میدان F است. این فضای برداری را فضای دوگان V می نامیم.

بدیهی است که اگر $\dim V=n$ آنگاه $\dim V^*=n\times1=n$ پس $\boxed{n=\dim V=\dim V^*}$

قضیه ۱: فرض کنید که V یک فضای برداری با بعد متناهی n روی میدان F باشد و $B=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$ یک پایه برای V باشد در این صورت یک پایه دوگان یکتایی مانند $B^*=\{f_1,f_2,\dots,f_n\}$ برای V^* وجود دارد به طوری که $\boxed{f_i(\alpha_j)=\delta_{ij}}$ که در آن

$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$ دلتای کرونکر

و به ازای هر تابعک خطی f روی V داریم $\boxed{f=\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)f_i}$ $(\forall f\in V^*)$

و به ازای هر بردار $\alpha\in V$ داریم $\boxed{\alpha=\sum_{i=1}^{n} f_i(\alpha)\alpha_i}$.

اثبات: چون $n=\dim V=\dim V^*$ پس V^* یک فضای برداری با بعد متناهی است بنابراین یک پایه $B^*=\{f_1,f_2,\dots,f_n\}$ دارد و چون $S=\{1\}$ یک پایه برای میدان F (به عنوان فضای برداری) است پس $f_i(\alpha_j)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$ که در آن f_i تابعک خطی یکتا است (طبق قضیه ۸ فصل تبدیل خطی)

حال فرض کنید که $f\in V^*=L(V,F)$ دلخواه باشد پس طبق پایه بودن B^* داریم

① $f=\sum_{i=1}^{n} c_i f_i$

$$f(\alpha_j)=\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(\alpha_j)=\sum_{i=1}^{n} c_i\,\delta_{ij}=c_j \;\; \boxed{i=j} \Rightarrow \boxed{f=\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_j)f_i}$$

حال اگر $\alpha=\sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i$ برداری دلخواه از V باشد آنگاه

$$f_j(\alpha)=\sum_{i=1}^{n} x_i f_j(\alpha_i)=\sum_{i=1}^{n} x_i\,\delta_{ij}=x_j \Rightarrow \boxed{\alpha=\sum_{j=1}^{n} f_j(\alpha)\alpha_j} \quad ②$$

تبصره: هر معادله ② $\alpha=\sum_{i=1}^{n} f_i(\alpha)\alpha_i$ روش خوبی برای توصیف ماهیت پایه دوگان B^* است. این معادله می‌گوید که اگر $B=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$ پایه مرتبی برای V و $B^*=\{f_1,f_2,\dots,f_n\}$ پایه دوگان آن باشد آنگاه f_i دقیقاً تابعی است که به هر بردار α از V، i امین مختص α نسبت به پایه مرتب B را تخصیص می‌دهد. از این رو f_i ها را توابع تخصیص برای B نیز می‌نامیم. هرگاه فرمول ① و ② ترکیب شود می‌گوید که اگر f در V^* با فرض $f(\alpha_i)=a_i$ باشد آنگاه وقتی که $\alpha=\sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i$ آنگاه

③ $f(\alpha)=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$

Scanned by CamScanner

به بیان دیگر هرگاه پایه مرتبی برای V انتخاب کنیم و هر بردار V را توسط n تایی مختصاتش نسبت به پایه B یعنی $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ توصیف کنیم آنگاه هر تابعک خطی به صورت

$f(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ است.

مثال ۵: فرض کنید که V مجموعه تمام چندجمله‌ای‌ها از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ حداکثر از درجه دو باشند یعنی $V = P_2$

فرض کنید که t_1 و t_2 و t_3 سه عدد حقیقی متمایز دلخواه باشند و $L_i(f) = f(t_i) \quad i=1,2,3$

(یعنی $L_1(f) = f(t_1)$ و $L_2(f) = f(t_2)$ و $L_3(f) = f(t_3)$ برای $f \in P_2$ دلخواه)

در این صورت L_1 و L_2 و L_3 تابعک خطی روی V هستند. این تابعک‌ها مستقل خطی هستند زیرا:

$$L = c_1L_1 + c_2L_2 + c_3L_3 = 0 \Rightarrow \forall \alpha \in V : L(\alpha) = 0 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} L(1) &= c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ L(x) &= t_1c_1 + t_2c_2 + t_3c_3 = 0 \\ L(x^2) &= t_1^2c_1 + t_2^2c_2 + t_3^2c_3 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

زیرا ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \end{bmatrix}$ معکوس پذیر است چون t_1 و t_2 و t_3 متمایز هستند.

در فصل (۱) دیدیم که

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} = (a-c)(c-b)(b-a) \xrightarrow[\text{متمایز } a,b,c]{} \neq 0$$

بنابراین چون $\dim V^* = 3$ پس $B^* = \{L_1, L_2, L_3\}$ یک پایه برای V^* است.

سؤال: پایه $B^* = \{L_1, L_2, L_3\}$ پایه دوگان کدام پایه از V است؟

یک چنین پایه باشد $\{f_1, f_2, f_3\}$ از V باید در شرط $L_i(f_j) = \delta_{ij}$ یا $f_j(t_i) = \delta_{ij}$ صدق کند. می‌توان دید که توابع f_1 و f_2 و f_3 عبارتند از:

$$f_1(x) = \frac{(x-t_2)(x-t_3)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)} \quad \text{و} \quad f_2(x) = \frac{(x-t_1)(x-t_3)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)} \quad \text{و} \quad f_3(x) = \frac{(x-t_1)(x-t_2)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}$$

پایه $\{f_1, f_2, f_3\}$ از $V = P_2$ جالب است زیرا بنابر (۲) به ازای هر $f(x) \in V$ داریم

$$f = f(t_1) f_1 + f(t_2) f_2 + f(t_3) f_3$$

از این رو اگر c_1 و c_2 و c_3 سه عدد حقیقی دلخواه باشند دقیقاً یک تک چندجمله‌ای f روی $\mathbb{R}$ وجود دارد که درجه‌اش حداکثر ۲ است و در شرط $f(t_j) = c_j$ $(j = 1, 2, 3)$ صدق می‌کند.

این تابع خطی ها عبارت است از $f = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n$

رابطه بین تابعک خطی و زیرفضا

اگر f یک تابعک خطی غیر صفری باشد آنگاه $\rho(f) = 1 =$ رتبه f و اگر $\dim V = n$ پس

$$\dim \ker f = \nu(f) = n-1$$

تعریف: هر زیرفضای $(n-1)$ بعدی از فضای n بعدی V را یک ابرفضا می نامیم.

مثال ۶: اگر $f: V \longrightarrow F$ یک تابعک خطی باشد و $\dim V = n$ آنگاه $\ker f$ یک فضای $(n-1)$ بعدی از V است پس $\ker f$ یک ابرفضا است.

برای نمونه $V = \mathbb{R}^n$ و $F = \mathbb{R}$ ، $f_i: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ، $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$$

تابع f_i (تابعک خطی f_i) برای هر $i = 1, 2, \dots, n$ که همان تابع تصویر روی مولفه iام است طبق مثال ۶، $\ker f_i$ برای هر i یک ابرفضا است چون $\dim \ker f = (n-1)$

$$\ker f_i = \{ (x_1, x_2, \dots, \cancel{x_i}, x_{i+1}, \dots, x_n) \mid x_j \in \mathbb{R} \} \cong \mathbb{R}^{n-1}$$

(مولفه iام حذف)

تعریف: اگر V یک فضای برداری روی میدان F باشد و $S \subseteq V$ ، پوچساز S را با S° نمایش می دهیم و S° متشکل از تمام تابعک های خطی f روی V که $\forall \alpha \in S: f(\alpha) = 0$

$$S^\circ = \{ f \in V^* \mid f(\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \in S \}$$

همیشه $S^\circ \leq V^*$ چه S زیرفضای V باشد چه زیرفضای V نباشد.

اگر $S = \{0\}$ آنگاه $S^\circ = V^*$ و اگر $S = V$ آنگاه $S^\circ = \{0\}$ زیرفضای صفر V^* است

(وقتی $\dim V$ متناهی باشد این مطلب ساده است)

قضیه ۲: فرض کنید که V فضای برداری با بعد متناهی بر روی میدان F باشد و $W \leq V$ در این صورت $\dim W + \dim W^\circ = \dim V$ (اثبات در کتاب جبر خطی هافمن صفحه ۱۳۵)

نتیجه ۱: اگر W زیرفضای k بعدی از یک فضای برداری n بعدی V باشد آنگاه W اشتراک $(n-k)$ ابرفضا از V است.

نتیجه ۲: اگر W_1 و W_2 زیرفضاهای یک فضای برداری با بعد متناهی باشند آنگاه

$$W_1 = W_2 \Longleftrightarrow W_1^\circ = W_2^\circ$$

(اثبات هر دو نتیجه در کتاب جبر خطی هافمن صفحه ۱۳۵)

حل دستگاه همگن از دید تابعک خطی

فرض کنید که بخواهیم جواب دستگاه همگن خطی مقابل را بدست آوریم.

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n = 0 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \cdots + A_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

اگر فرض کنیم که f_i ها $i=1,2,\ldots,m$ تابعک های خطی روی F^n باشند که به صورت زیر تعریف شوند:

$$f_i(x_1,x_2,\ldots,x_n) = A_{i1}x_1 + A_{i2}x_2 + \cdots + A_{in}x_n$$

آنگاه زیرفضایی از F^n متشکل از همه α هایی را می جوییم که $f_i(\alpha)=0$ ، $i=1,2,\ldots,m$

به بیان دیگر زیرفضایی را جستجو می کنیم که توسط $f_1, f_2, \ldots, f_m$ پوچ می شود.

عمل تحویل سطری ماتریس ضرایب روشی با نظام (نظام دار) جهت یافتن این زیرفضا در اختیار ما قرار می دهد. n تایی $(A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{in})$ مختصات تابعک خطی f_i نسبت به پایه ای که دوگان پایه استاندارد F^n است را بدست می دهد. لذا فضای سطری ماتریس ضرایب را می توان به عنوان فضای تابعک های خطی پدید آمده توسط $f_1, f_2, \ldots, f_m$ به حساب آورد. فضای جواب زیرفضای پوچ شده توسط این زیرفضا از تابعک ها است.

اکنون می توان از دیدگاه دوگان با دستگاه معادلات نظر کرد. با این معنی که فرض کنیم m بردار $\alpha_i = (A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{in})$ از F^n به ما داده شده است و بخواهیم پوچساز زیرفضای پدید آمده توسط این بردارها را بیابیم. چون هر تابعک خطی روی F^n نوعاً به صورت $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = c_1x_1+\cdots+c_nx_n$ است، شرط آنکه f در این پوچساز باشد این است که $\sum_{j=1}^{n} A_{ij}c_j = 0$ $(i=1,2,\ldots,m)$ یعنی آنکه $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ جوابی از دستگاه همگن $AX=0$ باشد. با این دید عمل تحویل سطری روشی با نظام برای یافتن پوچساز زیرفضای پدید آمده توسط مجموعه متناهی مفروض از بردارهای F^n بدست می دهد.

مثال ۷: سه تابعک خطی زیر روی R^4 را در نظر بگیرید:

$$f_1(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1+2x_2+2x_3+x_4$$
$$f_3(x_1,x_2,x_3,x_4) = -2x_1-4x_3+3x_4$$
و
$$f_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = 2x_2+x_4$$

زیرفضایی که توسط سه تابعک f_1 ، f_2 و f_3 پوچ می شود، با یافتن شکل تحویل شده ماتریس سطری پلکانی ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

به طور صریح بدست می آید. با چند عملیات سطری مقدماتی داریم

$$A \xrightarrow[-R_2+R_1\to R_1]{2R_1+R_3\to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2R_2+R_3\to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}R_2]{\frac{1}{3}R_3}$$

$$\sim \begin{bmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&\frac{1}{2}\\0&0&0&1\end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}R_3+R_2\to R_2} \begin{bmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=R$$

بنابراین تابعک های خطی

$g_1(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1+2x_3$ و $g_2(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_2$ و $g_3(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_4$

همان زیرفضای از $(\mathbb{R}^4)^*$ را پدید می آورند که تابعک های خطی f_1 و f_2 و f_3 پدید می آورند و

همان زیرفضای از $\mathbb{R}^4$ را پوچ می سازند که f_1 و f_2 و f_3 پوچ می سازند.

زیرفضای پوچ شده متشکل از بردارهای است که در شرایط $x_2=x_4=0$ و $x_1=-2x_3$ صدق می کند

مثال ۸: فرض کنید که W زیرفضای از $\mathbb{R}^5$ باشد که توسط بردارهای $\alpha_1=(2,-2,3,4,-1)$ و $\alpha_2=(-1,1,2,5,2)$ و $\alpha_3=(0,0,-1,-2,3)$ و $\alpha_4=(1,-1,2,3,0)$ پدید می آید. چگونه می توان W^0 (پوچساز W) را توصیف کرد. چگونه می توان W^0 پوچساز W را توصیف کرد. ماتریس 4×5 مانند A با بردارهای روی α_1 و α_2 و α_3 و α_4 در نظر می گیریم و ماتریس تحویل شده سطری پلکانی هم ارز آن یعنی R را می یابیم.

$$A=\begin{bmatrix}2&-2&3&4&-1\\-1&1&2&5&2\\0&0&-1&-2&3\\1&-1&2&3&0\end{bmatrix}$$

$$A \xrightarrow[-2R_4+R_1\to R_1]{R_4+R_2\to R_2} \begin{bmatrix}0&0&-1&-2&-1\\0&0&4&8&2\\0&0&-1&-2&3\\1&-1&2&3&0\end{bmatrix} \xrightarrow[4R_1+R_2\to R_2]{-R_1+R_3\to R_3} \begin{bmatrix}0&0&-1&-2&-1\\0&0&0&0&-2\\0&0&0&0&4\\1&-1&2&3&0\end{bmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{2}R_2]{2R_2+R_3\to R_3}$$

$$\begin{bmatrix}0&0&-1&-2&-1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\1&-1&2&3&0\end{bmatrix} \xrightarrow{R_2+R_1\to R_1} \begin{bmatrix}0&0&-1&-2&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\1&-1&2&3&0\end{bmatrix} \xrightarrow[2R_1+R_4\to R_4]{-R_1} \begin{bmatrix}0&0&1&2&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\1&-1&0&-1&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_{43}} \begin{bmatrix}0&0&1&2&0\\0&0&0&0&1\\1&-1&0&-1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} \xrightarrow{R_{31}} \begin{bmatrix}1&-1&0&-1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&2&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} \xrightarrow{R_{23}} \begin{bmatrix}1&-1&0&-1&0\\0&0&1&2&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=R$$

پس چون $\dim W=3$ پس $\dim W^*=5-3=2$

اگر f تابعک خطی روی $\mathbb{R}^5$ باشد آنگاه $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=\sum_{i=1}^{5}c_ix_i$ ، f به W^0 تعلق دارد

اگر و فقط اگر $f(\alpha_i)=0$ ، $i=1,2,3,4$ یعنی اگر و فقط اگر $(1\le i\le 4)$ $\sum_{j=1}^{n}A_{ij}c_j=0$

و این هم ارز است با $1\le i\le 3$ ، $\sum_{j=1}^{5}R_{ij}c_j=0$ یا

$$\begin{cases}c_1-c_2-c_4=0\\c_3+2c_4=0\\c_5=0\end{cases}$$

همچنین همه این گونه تابعک های خطی f را با تخصیص مقادیر دلخواه به c_2 و c_4 مثلاً $c_2=a$ و $c_4=b$ و سپس یافتن مقادیر متناظر $c_1=a+b$ و $c_3=-2b$ و $c_5=0$ به دست می آید

بنابراین W^0 متشکل از همه تابعک های خطی f به صورت زیر است.

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(a+b)x_1+ax_2-2bx_3+bx_4$$

$\dim W^0=2$ و پایه $\{f_1,f_2\}$ برای W^0 از قرار دادن $a=1,\ b=0$ در ابتدا و سپس $a=0,\ b=1$ به دست می آید

$$f_1(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=x_1+x_2 \quad \text{و} \quad f_2(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=x_1-2x_3+x_4$$

تابعک نوع f در W^0 به صورت $f=af_1+bf_2$ است بنابراین

$$W^0=\{af_1+bf_2 \mid a,b\in\mathbb{R}\}$$

دوگان مضاعف:

سؤال: آیا هر پایه برای V^* دوگان پایه ای برای V است یا خیر؟

روش جواب دادن به این سؤال این است که V^{**} فضای دوگانه V^* را بررسی کنیم.

تعریف: اگر α برداری از V باشد آنگاه α تبدیل خطی L_α را که با $\forall f\in V^*:\ L_\alpha(f)=f(\alpha)$ تعریف می شود روی V^* القا می کند.

قضیه ۳: الف) L_α یک تبدیل خطی (تابعک خطی) است

ب) نگاشت $\alpha \longrightarrow L_\alpha$ یک یکریختی از V به روی V^{**} است $(V\cong V^{**})$

اثبات الف)

$$\forall f,g\in V^*,\ \forall c\in F$$

$$L_\alpha(cf+g)=(cf+g)(\alpha)=(cf)(\alpha)+g(\alpha)=cf(\alpha)+g(\alpha)=cL_\alpha(f)+L_\alpha(g)$$

اثبات ب) نگاشت $\Phi: V\longrightarrow V^{**}$ با ضابطه $\forall \alpha\in V:\ \Phi(\alpha)=L_\alpha$

در ادامه نشان می دهیم که Φ یک یکریختی است:

$$\forall \alpha,\beta\in V,\ \forall c\in F:\ \gamma=c\alpha+\beta$$

تبدیل خطی بودن Φ:

$$\forall f\in V^*\quad L_\gamma(f)=f(\gamma)=f(c\alpha+\beta)=cf(\alpha)+f(\beta)=cL_\alpha(f)+L_\beta(f)$$

یعنی $L_\gamma=cL_\alpha+L_\beta$ بنابراین $\Phi(c\alpha+\beta)=c\Phi(\alpha)+\Phi(\beta)$

این تبدیل خطی نامنفرد است زیرا $\forall f\in V^*:\ 0=f(\alpha)=L_\alpha(f) \iff L_\alpha=0$

باید $\alpha=0$ شود (طبق تبصره قبل) یعنی تبدیل خطی Φ نامنفرد (یک به یک) است

حال چون $\dim V^{**}=\dim V^*=\dim V$ بنابراین طبق قضیه ... تبدیل خطی Φ معکوس پذیر است

پس Φ پوشا است بنابراین Φ یک یکریختی است.

تبصره: اگر $\dim V = n$ و $\alpha \neq 0$ آنگاه $L_\alpha \neq 0$ یا به بیان دیگر یک تابعک خطی f وجود دارد که $f(\alpha) \neq 0$
زیرا پایه مرتب $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ با شرط $\alpha_1 = \alpha$ را برای V انتخاب می‌کنیم و f را تابعک خطی می‌گیریم
که به هر بردار V اولین مختصش در پایه مرتب B نسبت می‌دهد.

نتیجه ۱: فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی بر روی هیات F باشد اگر L تابعک خطی روی V^* فضای دوگان V باشد آنگاه یک بردار یکتای α در V وجود دارد که
$\forall f \in V^* : L(f) = f(\alpha)$

نتیجه ۲: فرض کنید که V یک فضای برداری با بعد متناهی بر روی هیات F باشد. هر پایه از V^* دوگان پایه‌ای از V است.

اثبات: فرض کنید که $B^* = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ پایه‌ای برای V^* باشد بنابراین طبق قضیه ای پایه‌ی چون $\{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ برای V^{**} با خاصیت $L_i(f_j) = \delta_{ij}$ وجود دارد و طبق نتیجه ۱ به ازای هر i یک بردار α_i در V وجود دارد به طوری که
$\forall f \in V^* ; L_i(f) = f(\alpha_i)$
یعنی $L_i = L_{\alpha_i}$ در نتیجه $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ پایه‌ای برای V است و B^* دوگانه این پایه است.

قضیه ۴: اگر S زیرمجموعه‌ای از فضای برداری با بعد متناهی V باشد آنگاه $(S^0)^0$ زیرفضای پدید آمده توسط S است.

اثبات: فرض کنید که W زیرفضای پدید آمده توسط S باشد واضح است که $W^0 = S^0$. بنابراین کافی است ثابت کنیم که $W = W^{00}$.

$$\left.\begin{array}{l}\dim W + \dim W^0 = \dim V \\ \dim W^0 + \dim W^{00} = \dim V^* \\ \dim V = \dim V^*\end{array}\right\} \Rightarrow \dim W^{00} = \dim W \xrightarrow{W \subseteq W^{00}} W = W^{00}$$

تعریف: N را یک زیرفضای سره (محض) ماکسیمال از V نامیم هرگاه N زیرفضای سره (محض) V باشد و اگر $N \subseteq W \subseteq V$ آنگاه $W = V$ یا $N = W$
به عبارت دیگر بین V و N هیچ زیرفضای (از نظر شمول) وجود نداشته باشد.

مثال ۹: همواره ابرفضای V یک زیرفضای سره ماکسیمال V است.

قضیه ۵: اگر f یک تابعک خطی غیرصفری روی فضای برداری V باشد آنگاه فضای پوچ f، یک ابرفضا است و برعکس هر ابرفضای V، فضای پوچ تابعک خطی غیرصفری (نه لزوماً یکتا) روی V است.
(اثبات در کتاب جبر خطی هافمن صفحه ۱۴۴)

لم: اگر f و g دو تابعک خطی روی فضای برداری V باشند آنگاه، g مضرب اسکالر f است اگر و فقط اگر فضای پوچ g شامل فضای پوچ f باشد. یعنی اگر و فقط اگر
$f(\alpha) = 0 \Rightarrow g(\alpha) = 0$

اثبات: فرض کنیم که N_f و N_g به ترتیب فضای پوچ f و g باشند و فضای پوچ g شامل فضای پوچ f باشد یعنی $N_f \subseteq N_g$. اگر $f = 0$ پس $f(\alpha) = 0$ ؛ $\forall \alpha \in V$ چون $N_f \subseteq N_g$ پس $\forall \alpha \in V: g(\alpha) = 0$

پس $g = 0$. بنابراین g مضربی از f است.

اگر $f \neq 0$ آنگاه فضای پوچ f یعنی N_f یک ابرفضای V است، بردار $\alpha \in V$ را با شرط $f(\alpha) \neq 0$ انتخاب می‌کنیم و فرض می‌کنیم $c = \frac{g(\alpha)}{f(\alpha)}$. تابعک خطی $h = g - cf$ روی N_f صفر است زیرا f و g هر دو روی N_f صفر هستند و $h(\alpha) = g(\alpha) - cf(\alpha) = 0$ پس h روی زیرفضای پدید آمده توسط N_f و α (یعنی $\langle N_f, \alpha \rangle$) صفر است و این زیرفضا خود V است پس $h = 0$ یعنی $g = cf$.

برعکس اگر $g = cf$ بدیهی است که $N_f \subseteq N_g$ زیرا:

$$\forall \alpha \in N_f \Rightarrow f(\alpha) = 0 \Rightarrow g(\alpha) = c \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha \in N_g$$

قضیه ۶: فرض کنید که V و W دو زیرفضای برداری روی میدان F باشند. به ازای هر تبدیل خطی $T \in L(V, W)$ یک تبدیل خطی یکتای T^t در $L(W^*, V^*)$ وجود دارد که $\forall g \in W^*, \forall \alpha \in V : T^t g(\alpha) = g(T(\alpha))$

اثبات: تبدیل خطی بودن T^t:

$\forall g_1, g_2 \in W^*, \forall c \in F, \forall \alpha \in V$:

$$T^t(cg_1 + g_2)(\alpha) = (cg_1 + g_2)(T(\alpha)) = cg_1(T(\alpha)) + g_2(T(\alpha)) = c(T^t g_1(\alpha)) + (T^t g_2)(\alpha)$$

بیان یکتایی T^t: چون $f = g \circ T \in V^*$ پس T^t یکتاست.

تعریف: تبدیل خطی T^t را ترانهاده T می‌نامیم (T^t را الحاقی T نیز نامیده می‌شود)

قضیه ۷: فرض کنید که V و W دو فضای برداری روی میدان F باشند و T یک تبدیل خطی از V به W باشد در این صورت $\boxed{\text{فضای پوچ } T^t = \ker T^t = (\operatorname{Im} T)^0 = \text{پوچ‌ساز برد } T}$

و اگر V و W با بعد متناهی باشند آنگاه

$$\boxed{1)\ \rho(T) = \rho(T^t) \qquad 2)\ \operatorname{Im} T^t = (\ker T)^0 = \text{پوچ‌ساز فضای پوچ } T}$$

(اثبات در کتاب جبر خطی هافمن صفحه ۱۴۸)

قضیه ۸: فرض کنید که V و W دو فضای برداری با بعد متناهی روی میدان F باشند و B پایه مرتبی برای V با پایه دوگان B^* و B' پایه مرتبی برای W با پایه $(B')^*$ باشد. اگر $T \in L(V, W)$ و A ماتریس نمایش تبدیل خطی T نسبت به دو پایه B و B' باشد و D ماتریس نمایش T^t نسبت به دو پایه $(B')^*$ و B^* باشد آنگاه $D_{ji} = A_{ij}$ (یعنی $D^T = A$)

اثبات: فرض کنید که $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ و $B' = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$ و $B^* = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ و $(B')^* = \{g_1, g_2, \dots, g_m\}$ بنابراین طبق تعریف نمایش ماتریسی داریم

$$T(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{m} A_{ij} \beta_i \quad j = 1, 2, \dots, n \qquad \text{و} \qquad T^t g_j = \sum_{i=1}^{n} D_{ij} f_i \quad j = 1, 2, \dots, n$$

از طرف دیگر: $(T^t g_j)(\alpha_i) = g_j(T(\alpha_i)) = g_j(\sum_{k=1}^{m} A_{ki}\beta_k) = \sum_{k=1}^{m} A_{ki}\, g_j(\beta_k) = \sum_{k=1}^{m} A_{ki}\,\delta_{jk} = A_{ji}$

بطور کلی هر تابعک خطی f روی V داریم $f = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i) f_i$ اگر این فرمول را برای تابعک $f = T^t g_j$ بکار

ببریم و از این واقعیت که $(T^t g_j)(\alpha_i) = A_{ji}$ استفاده کنیم خواهیم داشت $T^t g_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ji} f_i$

که از آن بی‌درنگ نتیجه می‌شود $B_{ij} = A_{ji}$

قضیه ۹: فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ با درایه‌های در میدان F باشد. آنگاه رتبه سطری A با رتبه ستونی A برابر است.

اثبات: پایه مرتب استاندارد F^n را B و پایه مرتب استاندارد F^m را B' در نظر گرفته و فرض کنید T تبدیل خطی از F^n در F^m باشد که ماتریس آن نسبت به جفت B, B' برابر با A باشد. یعنی

$T(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_m)$ که در آن $y_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j$.

رتبه ستونی A برابر با $\rho(T)$ است زیرا برد T متشکل از همه m تایی‌هایی است که ترکیب خطی از ستون‌های ماتریس A هستند. تبدیل ترانهاده T^t نسبت به پایه‌های دوگان $(B')^*$ و B^* توسط ماتریس A^t نمایش داده می‌شود. چون ستون‌های A^t همان سطرهای A هستند بنابر همین استدلال می‌بینیم رتبه سطری A (رتبه ستونی A^t) برابر با رتبه T^t است. طبق قضیه ۸ رتبه‌های T و T^t با هم برابر هستند و لذا رتبه سطری A برابر با رتبه ستونی A است.

نتیجه: اگر A ماتریس $m \times n$ روی میدان F باشد و T تبدیل خطی تعریف شده در قضیه قبل باشد یعنی $T: F^n \to F^m$ آنگاه

$\rho(T) =$ (رتبه T) = رتبه سطری A = رتبه ستونی A $= r(A)$

عدد $r(A)$ را به طور ساده رتبه A می‌نامیم.

مثال ۱۰: فرض کنید V یک فضای برداری n بعدی روی میدان F باشد و عملگر خطی T روی V داده شده باشد. فرض کنید $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ یک پایه مرتب برای V باشد. طبق تعریف، ماتریس نمایش T نسبت به پایه B عبارت است از ماتریس A که $n \times n$ است طوری که

$T(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{n} A_{ij} \alpha_i$

به بیان دیگر A_{ij} i امین مختص بردار $T(\alpha_j)$ در پایه مرتب B است. اگر $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ پایه دوگان B باشد این مطلب به صورت ساده $A_{ij} = f_i(T\alpha_j)$ بیان می‌شود.

اکنون ببینیم هنگام تغییر پایه چه رخ می‌دهد. فرض کنید که $B' = \{\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n\}$ پایه مرتب دیگری برای V با پایه دوگان $\{f'_1, f'_2, \dots, f'_n\}$ باشد. اگر A' ماتریس نمایش T نسبت به پایه B' باشد،

آنگاه $A'_{ij} = f'_i(T(\alpha'_j))$.

فرض کنید که U عملگر خطی معکوس پذیری باشد که $U(\alpha_i) = \alpha'_i$ در این صورت توان داد U از $U^t f'_i = f_i$ بدست می آید به سادگی می توان مشاهده کرد که چون U معکوس پذیر است پس U^t هم معکوس پذیر است و $(U^{-1})^t = (U^t)^{-1}$، از این رو $f'_i = (U^{-1})^t f_i$ برای $i = 1, 2, \dots, n$ بنابراین

$$A'_{ij} = [(U^{-1})^t f_i](T(\alpha'_j)) = f_i(U^{-1}(T(\alpha'_j))) = f_i(U^{-1}TU(\alpha_j))$$

اما این رابطه چه می گوید؟ $f_i(U^{-1}TU(\alpha_j))$ چیزی جز درایه ij ام ماتریس $U^{-1}TU$ در پایه مرتب β نیست. محاسبات بالا نشان می دهد این اسکالر درایه ij ام ماتریس T در پایه مرتب β' هم هست با بیان دیگر

$$[T]_{\beta'} = [U^{-1}TU]_\beta = [U^{-1}]_\beta [T]_\beta [U]_\beta = [U]_\beta^{-1} [T]_\beta [U]_\beta$$

و این دقیقاً همان فرمول تغییر پایه است که قبلاً در فصل تبدیل خطی استخراج کرده بودیم.

تمرین ۱

۱- در $\mathbb{R}^3$ بردارهای $\alpha_1 = (1, 0, 1)$ و $\alpha_2 = (0, 1, -2)$ و $\alpha_3 = (-1, -1, 0)$ داده شده است

الف) هرگاه f تابعک خطی روی $\mathbb{R}^3$ با شرایط $f(\alpha_1) = 1$ و $f(\alpha_2) = -1$ و $f(\alpha_3) = 3$ باشد و $\alpha = (a, b, c)$ آنگاه $f(\alpha)$ را بدست آورید.

ب) تابعک خطی f روی $\mathbb{R}^3$ را که $f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = 0$ ولی $f(\alpha_3) \neq 0$ است را بطور صریح (روشن) توصیف کنید.

ج) فرض کنید که تابعک خطی f با خواص $f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = 0$ و $f(\alpha_3) \neq 0$ باشد و $\alpha = (2, 3, -1)$ نشان دهید که $f(\alpha) \neq 0$

۲- فرض کنید پایه $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ برای $\mathbb{C}^3$ به صورت $\alpha_1 = (1, 0, -1)$ و $\alpha_2 = (1, 1, 1)$ و $\alpha_3 = (2, 2, 0)$ تعریف شده باشد، پایه دوگان B یعنی B^* را بیابید.

۳- اگر A و B دو ماتریس $n \times n$ روی میدان F باشند، نشان دهید که $tr(AB) = tr(BA)$. سپس نشان دهید که ماتریس های متشابه اثرهای مساوی دارند

۴- فرض کنید که $V = P_2$ یعنی مجموعه تمام چندجمله‌ایها از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ با درجه ۲ باشد فرض کنید که $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$ روی V سه تبدیل خطی $f_1(f(x)) = \int_0^1 f(x)\,dx$ و $f_2(f(x)) = \int_0^2 f(x)\,dx$ و $f_3(f(x)) = \int_0^{-1} f(x)\,dx$ تعریف می کنیم، با ارائه پایه‌ای برای V که $\{f_1, f_2, f_3\}$ دوگان آن باشد، نشان دهید $\{f_1, f_2, f_3\}$ پایه ای برای V^* است.

۵- فرض کنید که m و n دو عدد صحیح مثبت و F یک هیات باشد و $f_1, f_2, \dots, f_m$ تابعک های خطی روی F^n باشند. به ازای هر α در F^n تعریف می کنیم $T(\alpha) = (f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha))$. نشان دهید که T تبدیل خطی

از F^n در F^m است. سپس نشان دهید که هر تبدیل خطی از F^n به F^m به ازای $f_1, \ldots, f_m$ های به شکل بالا است.

۶- فرض کنید که $\alpha_1 = (1, 0, -1, 2)$ و $\alpha_2 = (2, 3, 1, 1)$ و W زیرفضای پدید آمده توسط α_1 و α_2 از $\mathbb{R}^4$ باشد از تابعک های خطی ماشد f به صورت $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$ کدام در پوچساز W قرار دارند؟

۷- فرض کنید که W زیرفضایی از $\mathbb{R}^5$ باشد که توسط بردارهای $\alpha_1 = e_1 + 2e_2 + e_3$
$\alpha_2 = e_2 + 3e_3 + 3e_4 + e_5$ و $\alpha_3 = e_1 + 4e_2 + 6e_3 + 4e_4 + e_5$
پدید می آید، پایه ای برای W^0 بیابید.

۸- فرض کنید که $V = Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$، فرض کنید که W زیرفضای متشکل از همه A های با شرط $AB = 0$ از V باشد، یعنی $W = \{A \in V \mid AB = 0\}$
و تابعک خطی f روی V متعلق به پوچساز W باشد، اگر $f(I) = 0$ و $f(C) = 3$ که در آن $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ماتریس همانی و $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد آنگاه $f(B)$ را بیابید.

۹- فرض کنید که n عددی صحیح مثبت و F یک میدان باشد. W را مجموعه زیر در نظر بگیریم
$$W = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F^n \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$$
الف) ثابت کنید که W^0 متشکل است از همه تابعک های خطی f به صورت $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c\sum_{j=1}^{n} x_j$
ب) نشان دهید که W^* فضای دوگان W را می توان بطور طبیعی با تابعک های خطی $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ روی F^n با شرط $c_1 + c_2 + \cdots + c_n = 0$ یکی گرفت.

۱۰- فرض کنید که F یک میدان باشد و f تابعک خطی باشد که توسط $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$ تعریف می شود
به ازای هر یک از عملگرهای خطی زیر، فرض کنید $g = T^t f$ آنگاه $g(x_1, x_2)$ را بیابید.
الف) $T(x_1, x_2) = (x_1, 0)$ ب) $T(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$
ج) $T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2)$

۱۱- فرض کنید $V = \mathbb{R}[x]$ و a و b دو عدد حقیقی ثابت در نظر بگیرید و فرض کنید که f تابعک خطی روی V باشد که توسط $f(p) = \int_a^b p(x)\,dx$ تعریف می شود. اگر D عملگر مشتق گیری روی V باشد آنگاه $D^t f$ را محاسبه کنید.

۱۲- فرض کنید که $V = Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ و B یک ماتریس $n\times n$ و ثابت باشد. اگر عملگر خطی T روی V با $T(A) = AB - BA$ تعریف شده و f تابع رد (اثر ماتریس) باشد آنگاه $T^t f$ را محاسبه کنید.