بهینه سازی و مسائل بهینه سازی:

مسائل عملی بسیاری وجود دارد که درگیر تعیین بزرگترین مقدار، کمترین مقدار، کمترین بها، کوتاهترین زمان، کوتاهترین فاصله، بیشترین درآمد و سود و ... می باشند. در این مسائل «بهترین» مقدار کمیت متغیر خواسته می شود. به این گونه مسائل را مسائل بهینه سازی می نامیم. کمیتی که باید بهینه شود را می توان به صورت تابعی از یک متغیر بیان کرد و سپس به کمک قضیه اکسترمم مطلق و یا قضیه های دیگر اکسترمم آن کمیت را بهینه کرد.

مراحل حل مسائل بهینه سازی:

۱- فهمیدن مسأله: شناخت داده ها و شناخت خواسته ها (مجهول ها) مخصوصاً واژه هایی که در صورت مسئله به کار رفته است.

۲- کشیدن شکل: در اکثر مسئله ها رسم شکل کمک می کند که رابطه بین داده ها و مجهولات را بیابیم.

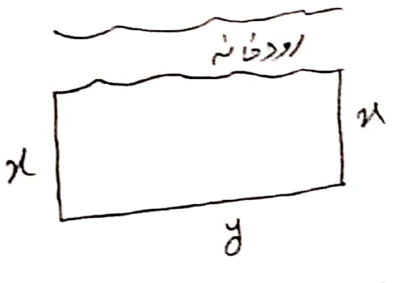
۳- نمادگذاری کردن: یعنی داده ها و مجهولات را با نمادهای معمول ریاضی نام گذاری می کنیم و یک تابع ریاضی که باید بهینه شود را به دست می آوریم.

۴- اگر تابع ریاضی بیش از یک متغیر داشته باشد به کمک معلومات مسئله رابطه (معادله) بین این متغیرها را می یابیم و به کمک آن معادله، همه متغیرها را بر حسب یک متغیر می نویسیم تا تابع ریاضی یک متغیره شود.

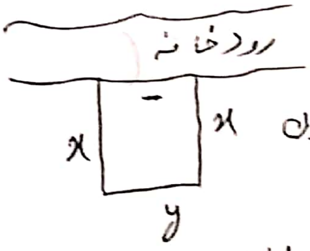
۵- با استفاده از اکسترمم مطلق و نسبی تابع بدست آمده را اکسترمم می کنیم.

توجه: اگر دامنه تابع ریاضی بدست آمده بازه بسته باشد قضیه اکسترمم مطلق را برای حل مسئله به کار ببریم.

مثال ۱: کشاورزی ۲۴۰۰ متر توری دارد و می خواهد دور زمین کشاورزی خود که با رودخانه ای مستقیم هم مرز است با توری حصارکشی کند. مرز رودخانه نیازی به حصارکشی ندارد. ابعاد مستطیلی که بیشترین مساحت را دارد چقدر است (به عبارت دیگر مساحت بزرگترین زمین مستطیل شکل که کشاورز می تواند حصارکشی کند چقدر است.)



یا



حل: مستطیل های متفاوتی می توان رسم کرد.

محیط زمین $= 2400 = 2x + y =$ طول توری

بنابراین $y = 2400 - 2x$

$A = xy = x(2400 - 2x) =$ مساحت زمین

$A(x) = 2400x - 2x^2 \qquad 0 \le x \le 1200$

یافتن دامنه (یا بازه مورد نظر)

چون x و y هر دو نمی توانند منفی باشند پس $x \ge 0$ و $1200 \ge x$ (در غیر این صورت مساحت منفی می شود)

روش دیگر: هر وقت هدف ماکسیمم کردن است تابع را مساوی صفر قرار می دهیم و از روی آن ابتدا و انتهای بازه یا دامنه را مشخص می کنیم.

$A(x) = x(2400 - 2x) = 0 \Rightarrow x = 0 , x = 1200 \Rightarrow I = [0, 1200]$

$A'(x) = 2400 - 4x = 0 \Rightarrow x = \frac{2400}{4} = 600$ نقطه بحرانی

حال طبق قضیه اکسترمم مطلق، بیشترین مقدار تابع $A(x)$ روی بازه $[0, 1200]$ در بین مقادیر زیر است

$A(0) = 0$, $A(1200) = 0$, $\boxed{A(600) = 720000 \text{ ماکسیمم مطلق}}$

بنابراین $y = 2400 - 2(600) = 1200$

پس طول ۱۲۰۰ و عرض ۶۰۰ متر خواهد بود.

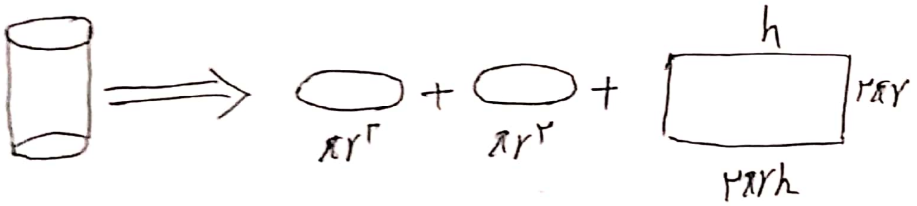
می‌توان از آزمون مشتق مرتبه دوم ماکسیمم مطلق را یافت یعنی چون $A''(x) = -4 < 0$ پس در $x = 600$ ماکسیمم مطلق دارد.

مثال ۲: می‌خواهیم یک قوطی استوانه‌ای شکل طوری بسازیم که یک لیتر روغن بگیرد. ابعاد این قوطی را پیدا کنید که هزینه فلز بکار رفته در ساخت این قوطی مینیمم گردد.

حل: r را شعاع و h را ارتفاع استوانه برحسب سانتی‌متر در نظر می‌گیریم پس $\pi r^2 h = 1000$ = حجم استوانه

باید مساحت سطح جانبی استوانه را مینیمم مطلق کنیم

$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$



$\pi r^2 h = 1000 \Rightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2} \Rightarrow A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$

$\Rightarrow A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r} \qquad I = (0, +\infty)$

$A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2000}{r^2} = 0 \Rightarrow 4\pi r^3 = 2000 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$

نقطه بحرانی تابع.

چون بازه I باز است از قضیه اکسترمم مطلق برای بازه‌های باز که در صفحه بعد می‌آید استفاده می‌کنیم.

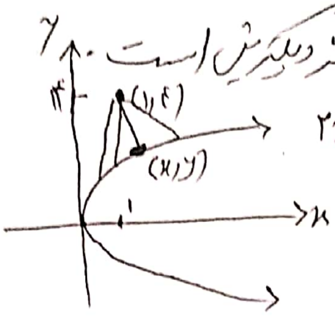
$\lim_{r \to 0^+} A(r) = 0 + \infty = +\infty$, $\lim_{r \to +\infty} A(r) = +\infty + 0 = +\infty \Rightarrow A\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right) =$ مقدار مینیمم مطلق

بنابراین $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ مقدار مینیمم مطلق تابع $A(r)$ را می‌دهد در این صورت

$h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi\left(\frac{500}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}}$

یکی را انتخاب کرد

مثال ۳: نقطه‌ای روی منحنی $y^2=2x$ پیدا کنید که به نقطه (۱,۴) نزدیکترین است.



حل: d = فاصله نقطه (x,y) تا نقطه (۱,۴)

$$d=\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2}=\sqrt{(\tfrac{1}{2}y^2-1)^2+(y-4)^2}$$

برای راحتی $d^2=f(y)$ را اکسترمم می‌کنیم یعنی

$$f(y)=(\tfrac{1}{2}y^2-1)^2+(y-4)^2 \qquad I=[0,+\infty)$$

$$f'(y)=2(\tfrac{2}{2}y)(\tfrac{1}{2}y^2-1)+2(y-4)=y^3-2y+2y-8=y^3-8=0 \to y=\sqrt[3]{8}=2$$

$$\lim_{y\to+\infty} f(y)=+\infty \ , \quad f(0)=1+16=17$$

کمترین مقدار طبق قضیه اکسترمم مطلق روی بازه باز بین $f(0)$ و $f(2)$ است

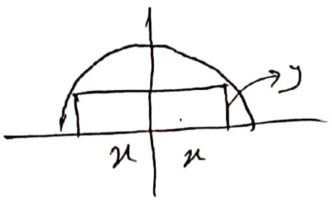
$$f(2)=(\tfrac{4}{2}-1)^2+(2-4)^2=1+4=5 \ \text{(مینیمم مطلق)} \ , \quad f(0)=17$$

$$y=2 \Rightarrow x=\tfrac{1}{2}y^2=\tfrac{1}{2}(4)=2 \Rightarrow (x,y)=(2,2)$$ جواب مسئله

مثال ۴: مساحت بزرگترین مستطیلی را بیابید که می‌توان آن را در نیم‌دایره‌ای به شعاع r محاط کرد.

حل: روش اول: فرض کنید که معادله نیم دایره $x^2+y^2=r^2$ باشد $y\geq 0$

یعنی $y=\sqrt{r^2-x^2}$



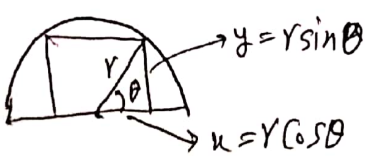
$$A = \text{مساحت مستطیل} = 2xy = 2x\sqrt{r^2-x^2} \qquad I=[0,r]$$

$$A(x)=2x\sqrt{r^2-x^2} \quad I=[0,r] \Rightarrow A'(x)=2\sqrt{r^2-x^2}+2x\left(\frac{-2x}{2\sqrt{r^2-x^2}}\right)=\frac{2(r^2-2x^2)}{\sqrt{r^2-x^2}}=0$$

$$\Rightarrow 2x^2=r^2 \Rightarrow \boxed{x=\frac{r}{\sqrt{2}}} \ , \ x=\frac{-r}{\sqrt{2}} \ \text{غ ق ق}$$

پس طبق قضیه اکسترمم مطلق روی بازه بسته $[0,r]$ داریم:

$$A(0)=0 \ , \ A(r)=0 \ , \ A\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)=2\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{r^2-\frac{r^2}{2}}=r^2$$ ماکسیمم مطلق



روش دوم: فرض کنید که θ زاویه نشان داده شده در شکل مقابل باشد در این صورت

$$A(\theta)=(2r\cos\theta)(r\sin\theta)=r^2\sin 2\theta=r^2$$ ماکسیمم مطلق

یعنی $2r=h=2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ ، پس ابعاد استوانه باید $r=\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ و $h=2r$ باشد تا هزینه مینیمم گردد.

در مثال قبل می‌توان به دو توجه زیر دقت کرد.

توجه ① برای مینیمم کردن تابع $A(r)=2\pi r^2+2\pi r h$ تحت شرط $\pi r^2 h=1000$ می‌توان از مشتق‌گیری ضمنی کمک گرفت (یعنی h را برحسب r پیدا نکرد) h را تابعی از r در نظر گرفته و از دو معادله بالا نسبت به r مشتق ضمنی می‌گیریم.

$A'=4\pi r+2\pi h+2\pi r h'$ و $2\pi r h+\pi r^2 h'=0$

مینیمم در نقطه بحرانی اتفاق می‌افتد پس دو معادله $A'=0$ و $2\pi r h+\pi r^2 h'=0$ را باهم حل می‌کنیم

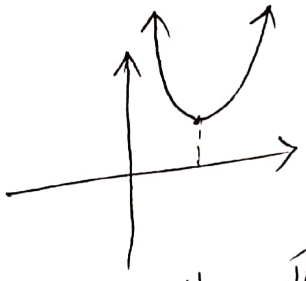
$$\begin{cases} 4\pi r+2\pi h+2\pi r h'=0 \Longrightarrow 2r+h+rh'=0 \\ 2\pi r h+\pi r^2 h'=0 \Longrightarrow 2h+rh'=0 \end{cases} \xrightarrow[\text{دو معادله از هم}]{\text{تفریق کردن}} 2r-h=0 \Longrightarrow \boxed{h=2r}$$

توجه ② اگر در مثال قبل بخواهد که سر قوطی استوانه باز باشد (یعنی قوطی سر نداشته باشد) در این صورت باید مسئله را با تغییرات $A=\underline{\pi r^2}+2\pi r h$ و $\pi r^2 h=1000$ حل کنیم.

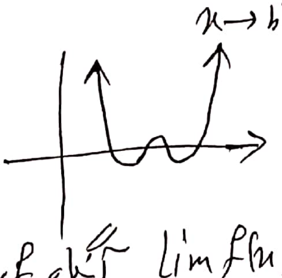
قضیه اکسترمم مطلق روی بازه‌های باز: فرض کنید که f تابعی پیوسته بر بازه $I=(a,b)$ باشد (a می‌تواند $-\infty$ و b می‌تواند $+\infty$ هم باشد) در این صورت

الف) اگر $\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to b^-} f(x)=+\infty$ آنگاه f بر I مینیمم مطلق دارد.

یعنی شکل نمودار به صورت مقابل است:

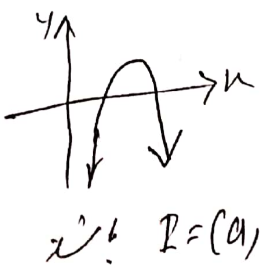


یا

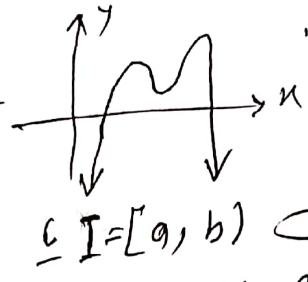


ب) اگر $\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to b^-} f(x)=-\infty$ آنگاه f بر I ماکسیمم مطلق دارد.

یعنی شکل نمودار تابع f به صورت مقابل است.



یا



توجه: در قضیه بالا می‌تواند بازه I به صورت $I=[a,b)$ یا $I=(a,b]$ باشد

در این صورت برای $I=[a,b)$: $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ و $\lim_{x\to b^-} f(x)=?$

و باید بین $f(a)$ و $f(c)$ که c نقطه بحرانی تابع است یکی را انتخاب کرد

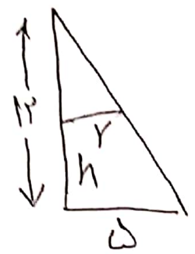
و برای $I=(a,b]$ ، $f(b)$ و $\lim_{x\to a^+} f(x)=?$ و باید بین $f(b)$ و $f(c)$ که c نقطه بحرانی تابع است

چون $-1 \le \sin 2\theta \le 1$ و ماکسیمم مطلق $A(\theta)$ وقتی است که $\sin 2\theta = 1$ یعنی $2\theta = \frac{\pi}{2}$ باشد

پس $\theta = \frac{\pi}{4}$ یعنی $\begin{cases} x = 2\cos\frac{\pi}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \\ y = 2\sin\frac{\pi}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \end{cases}$ یعنی $(x,y) = (\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}})$

و مساحت ماکسیمم برابر 2^2 است.

مثال ۵. (تمرین ۲۸ کتاب استوارت صفحه ۳۳۰) مطلوب است ابعاد استوانه مستدیر قائم با بیشترین حجم که بتوان آن را در یک مخروط مستدیر قائم با شعاع ۵ سانتی‌متر و ارتفاع ۱۲ سانتی‌متر محاط کرد.



حل: مستدیر قائم یعنی قاعده دایره و به صورت قائم است.

$V = \pi r^2 h$ = حجم استوانه

طبق تناسب در مثلث مقابل داریم

$$\frac{12-h}{12} = \frac{r}{5} \Rightarrow h = \frac{60-12r}{5}$$

$$V(r) = \pi r^2\left(\frac{60-12r}{5}\right) = \frac{12}{5}\pi\left(5r^2 - r^3\right) \qquad I = [0,5]$$

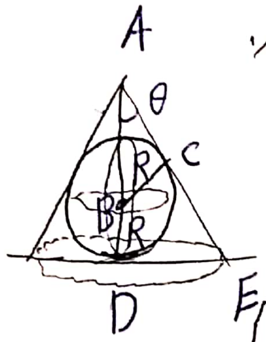
طبق قضیه اکسترمم مطلق روی بازه بسته:

$$V'(r) = \frac{12}{5}\pi\left(10r - 3r^2\right) = 0 \quad \begin{cases} r = 0 \\ r = \frac{10}{3} \end{cases}$$

$V(0) = 0$ و $V(5) = 0$ و $\boxed{V\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{400\pi}{9}}$ ماکسیمم مطلق

$\boxed{r = \frac{10}{3} \to h = 4}$ ابعاد استوانه

توجه: می‌توان تابع V را برحسب h نوشت در این صورت $V(h) = \pi h\left(\frac{60-5h}{12}\right)^2$ و $h \in [0,12]$

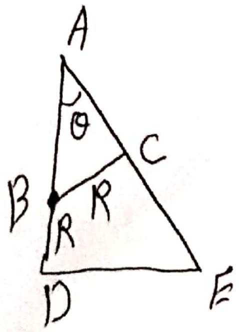


مثال ۶: حجم کوچکترین مخروط مستدیر قائم محیط بر یک کره با شعاع R را بیابید.

حل: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ = حجم مخروط

h ارتفاع مخروط و r شعاع قاعده مخروط است.

در مثلث قائم الزاویه $\triangle ADE$ داریم: $\boxed{\tan\theta = \frac{|DE|}{|AD|} = \frac{r}{h}}$ (1)



در مثلث قائم الزاویه $\triangle ABC$ داریم $\tan\theta = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{R}{\sqrt{h^2 - 2Rh}}$

$$|AC| = \sqrt{(R-h)^2 - R^2} = \sqrt{h^2 - 2Rh}$$

طبق ① و ② داریم $\frac{r}{h} = \frac{R}{\sqrt{h^2-2Rh}}$ بنابراین $r = \frac{Rh}{\sqrt{h^2-2Rh}}$.

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi h\left(\frac{Rh}{\sqrt{h^2-2Rh}}\right)^2 = \frac{1}{3}\pi R^2\left(\frac{h^2}{h-2R}\right) \qquad I = (2R, +\infty)$$

$$f'(h) = \frac{1}{3}\pi R^2\left[\frac{2h(h-2R)-h^2}{(h-2R)^2}\right] = \frac{1}{3}\pi R^2\left[\frac{h(h-4R)}{(h-2R)^2}\right] = 0 \begin{cases} h=0 \quad \text{غق} \\ h=4R \end{cases}$$

نقطه بحرانی

طبق قضیه اکسترمم مطلق روی بازه باز داریم: چون

$$\lim_{h\to(2R)^+} V(h) = +\infty = \lim_{h\to+\infty} V(h)$$

پس می‌نیمم مطلق $V(4R) = \frac{1}{3}\pi R^2$ است

بنابراین $h = 4R$ و $r = \frac{4R^2}{\sqrt{16R^2-8R^2}} = \frac{4R}{2\sqrt{2}}$

تمرین

۱) کوتاه‌ترین فاصله بین نقطه $P(2,0)$ و منحنی $y=\sqrt{x}$ را بیابید.

۲) کوتاه‌ترین فاصله نقطه $A(2,\frac{1}{2})$ تا منحنی $y=x^2$ را بیابید.

۳) می‌خواهیم یک استوانه مستدیر قائم را در یک کره به شعاع مفروض محاط کنیم، نسبت ارتفاع به شعاع قاعده استوانه چقدر باشد تا مساحت رویه جانبی استوانه حداکثر ممکن باشد

۴- می‌خواهیم با یک مقوا مربعی شکل به ضلع ۱۲ سانتی‌متر یک جعبه سرباز بسازیم. برای این منظور باید از چهار گوشه آن مربع کوچکی ببریم و لبه‌های باقی مانده را بالا تا زده تا جعبه ساخته شود. ماکسیمم حجم جعبه‌ای که با این طریق ساخته می‌شود چقدر است؟

۵- مساحت بزرگترین مستطیلی را بیابید که می‌توان آن را در بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ محاط کرد

۶- ابعاد مستطیلی با بزرگترین مساحت را بیابید که قاعده‌اش روی محور xها باشد و دو رأس دیگرش بالای محور xها و روی منحنی $y=8-x^2$ قرار داشته باشند.

۷- ابعاد مستطیلی با بیشترین مساحت را بیابید که می‌توان آن را در دایره‌ای به شعاع r محاط کرد