حل چند سؤال امتحانی ریاضی عمومی ۱ (سری‌ها و سری‌های توانی) — ص ۱

امتحان دی ماه ۹۶ سؤال ۱ از ۲ و ۳

۱- شعاع همگرایی و بازه همگرایی (دامنه همگرایی) سری توانی $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2+1}$ را بیابید.

حل: از آزمون نسبت استفاده می‌کنیم

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)^2+1}\cdot\frac{n^2+1}{(x-2)^n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}|x-2|=|x-2|<1$$

بنابراین $-1<x-2<1$ پس بازه همگرایی مطلق $(1,3)$ است زیرا $1<x<3$

و شعاع همگرایی $R=1$. برای یافتن بازه همگرایی $x=1$ و $x=3$ را جداگانه بررسی می‌کنیم

$x=1\Rightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$ همگراست چون $\sum_{n=0}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right|=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}$ همگراست پس داریم:

می‌دانیم که $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ یک p سری است و همگراست و چون $\frac{1}{n^2+1}<\frac{1}{n^2}$ طبق آزمون مقایسه $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}$ همگراست

$x=-1\Rightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}$ همگراست $\Rightarrow$ بازه همگرایی $[1,3]$

۲- الف) سری مک‌لوران تابع f با ضابطه $f(x)=\frac{-1+e^{x^2}}{x}$ را بیابید.

ب) با استفاده از قسمت الف) مجموع سری زیر را بیابید $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1}{n!}2^{2n-2}$

حل الف: جمله اول را جدا می‌کنیم.

$$e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\Rightarrow e^{x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{n!}\Rightarrow e^{x^2}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$$

$$\Rightarrow -1+e^{x^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{n!}\Rightarrow\frac{-1+e^{x^2}}{x}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n-1}}{n!}$$

حل ب) مشتق گیری از سری توانی

$$f(x)=\frac{-1+e^{x^2}}{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{2x^2e^{x^2}+1-e^{x^2}}{x^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)x^{2n-2}}{n!}$$

$$\xrightarrow{x=2}\quad\frac{8e^4+1-e^4}{4}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n-1)}{n!}(2)^{2n-2}\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1}{n!}2^{2n-2}=\frac{7e^4+1}{4}$$

۳- نوع همگرایی و یا واگرایی سری‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n$ و ب) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}n^2 2^n}{n!}$

حل: الف) طبق آزمون ریشه nام کوشی

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+1}{2n^2+1}=\frac{1}{2}<1$$

سری بطور مطلق همگراست.

حل ب): طبق آزمون نسبت

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\left|\frac{(-1)^{n+2}(n+1)^2 2^{n+1}}{(n+1)!}\times\frac{n!}{(-1)^{n+1}2^n n^2}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{2(n+1)^2}{n^2(n+1)}=0<1$$

سری بطور مطلق همگراست.

امتحان ۹۷/۳/۲۵ سؤال ۴ و ۵ و ۶

۴- بازه همگرایی و شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-10)^n}{n!} x^n$ را بدست آورید.

حل: طبق آزمون مقایسه

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(-10)^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{(-10)^n x^n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{10|x|}{n+1} = 0 < 1$$

سری بطور مطلق روی $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ همگراست و شعاع همگرایی $R=+\infty$ است

۵- بسط سری توانی تابع $f(x) = x\tan^{-1}x$ را محاسبه نمایید.

حل:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad |x|<1 \Rightarrow (\text{تبدیل } x \text{ به } -x^2) \quad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$ گرفتن انتگرال از صفر تا x

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \Rightarrow \tan^{-1}x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \Rightarrow f(x) = x\tan^{-1}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{2n+1}$$

۶- همگرایی یا واگرایی سری های زیر را تعیین کنید. الف) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$ ب) $\sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-n}$

حل الف) آزمون ریشه n ام کوشی

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

سری بطور مطلق همگراست.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}} = e^{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln n} \overset{Hop}{=} e^{\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1}} = e^0 = 1$$

ب) $\sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-n}$ آزمون نسبت

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(n+1)e^{-(n+1)}}{n e^{-n}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{e^{n+1}}$$

$= 1 \times 1 = 1$ این آزمون جواب نمی دهد، پس باید از آزمون دیگری مثلاً آزمون انتگرال استفاده کنیم.

$f(x) = \frac{x}{e^x} \quad [1, +\infty)$ $f(x) > 0$ و $f(x)$ روی $[1, +\infty)$ پیوسته است.

$f'(x) = \frac{-xe^x + e^x}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x} = 0 \to x = 1$ بدیهی است که اگر $x>1$ آنگاه $f'(x) < 0$ پس تابع نزولی است.

$$f(n) = \frac{n}{e^n} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b x e^{-x} dx \overset{\text{روش جزء به جزء}}{=} \lim_{x\to+\infty} \left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]_1^b =$$

$$= -\lim_{b\to+\infty} (be^{-b} + e^{-b}) + (e^{-1} + e^{-1}) = 2e^{-1} - \lim_{b\to+\infty} \frac{b+1}{e^b} \overset{H.P}{=} 2e^{-1} - \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{e^b} = 2e^{-1} = \frac{2}{e}$$ همگرا

چون $\int_1^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx$ همگرا پس $\sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-n}$ همگراست.

امتحان ۹۴/۳/۱۷
سؤال ۷، ۸، ۹

۷- شعاع و بازه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{2^n(3n-1)}$ را بیابید.

حل: آزمون ریشه nام کوشی

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n (x-1)^n}{2^n(3n-1)}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x-1|}{2\sqrt[n]{3n-1}} = \frac{1}{2}|x-1| < 1 \Rightarrow |x-1| < 2$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3n-1} = \lim_{n\to+\infty} (3n-1)^{\frac{1}{n}} = e^{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}(3n-1)} = e^{\lim_{n\to+\infty} \frac{3n-1}{n}} \overset{H.P}{=} e^{\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{3n-1}} = e^0 = 1$$

$|x-1| < 2 \Rightarrow -2 < x-1 < 2 \Rightarrow -1 < x < 3 \Rightarrow (-1,3)$ بازه همگرایی مطلق، $R=2$ شعاع همگرایی

$$x=-1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(-2)^n}{2^n(3n-1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3n-1}$$

چون $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ واگراست طبق آزمون مقایسه حدی $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{3n-1}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{3}$ پس $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3n-1}$ واگراست.

$$x=3 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2)^n}{2^n(3n-1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n-1}$$ همگراست $\Rightarrow (-1,3]$ بازه همگرایی

طبق آزمون لایب‌نیتز چون $a_n = \frac{(-1)^n}{3n-1}$ پس $|a_{n+1}| < |a_n|$ و $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0$ پس سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n-1}$ همگراست.

۸- سری مکلورن تابع $f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$ را بیابید.

حل:
$$f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} = \frac{-1}{2(1-\frac{x}{2})} + \frac{1}{1-x} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad , \quad \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

۹- همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n!(2n)!}{(3n)!}$ را بررسی کنید؟

حل: از آزمون نسبت استفاده می‌کنیم

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!(2n+2)!}{(3n+3)!} \times \frac{(3n)!}{(-1)^n n!(2n)!}\right| = \lim \frac{(n+1)(2n+2)(2n+1)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} = \frac{4}{27} < 1$$

بنابراین سری بطور مطلق همگراست.

امتحان ۹۴/۱۰/۱۹
سؤال ۱۰، ۱۱، ۱۲

۱۰- سری توانی تابع $f(x)=\cos^2 x$ را بیابید؟

حل:
$$f(x)=\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2x)^n}{(2n)!}=$$
$$=\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}(2n)!}$$

زیرا $\cos x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ برای هر عدد حقیقی x

۱۱- شعاع همگرایی و بازه همگرایی سری توانی $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2x-3)^{2n+1}}{n}$ را بدست آورید.

حل: طبق آزمون نسبت
$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\left|\frac{(-1)^{n+1}(2x-3)^{2n+3}}{n+1}\times\frac{n}{(-1)^n(2x-3)^{2n+1}}\right|=$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}|2x-3|^2=|2x-3|^2<1\Rightarrow|2x-3|<1\Rightarrow -1<2x-3<1\Rightarrow 1<x<2$$

پس شعاع همگرایی $R=1$ و بازه همگرایی مطلق $(1,2)$ است

$$\left.\begin{aligned}x=2&\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(1)^{2n+1}}{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\\x=1&\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(-1)^{2n+1}}{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$ طبق آزمون لایب نیتز همگرا است

زیرا $a_n=\frac{(-1)^n}{n}$ و $|a_{n+1}|<|a_n|$ و $\lim_{n\to+\infty}|a_n|=0$

۱۲- همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n^6+n^2}}$ را معین کنید

حل: طبق آزمون مقایسه حدی چون $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ یک p-سری $(p=2)$ است همگراست بنابراین

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{2n+1}{\sqrt{n^6+n^2}}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^3+n^2}{\sqrt{n^6\left(1+\frac{1}{n^4}\right)}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^3+n^2}{n^3\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}}=2$$

پس سری $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n^6+n^2}}$ واگرا است

۱۳- شعاع همگرایی و بازه همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+1}(x+1)^n$ را بدست آورید.

حل: طبق آزمون نسبت داریم
$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)(x+1)^{n+1}}{(n+1)^2+1}\cdot\frac{n^2+1}{(-1)^n n(x+1)^n}\right|=$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)(n^2+1)}{n[(n+1)^2+1]}|x+1|=|x+1|<1\Rightarrow -1<x+1<1\Rightarrow -2<x<0$$

شعاع همگرایی $R=1$ و بازه همگرایی مطلق $(-2,0)$ است.

$x=0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n . n . (1)^n}{n^2+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$ همگرای مشروط

طبق آزمون لایب نیتز

$a_n = \frac{(-1)^n . n}{n^2+1} \Rightarrow |a_{n+1}| < |a_n| \ , \ \lim_{n\to+\infty} |a_n| = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$

$x=-2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n (-1)^n}{n^2+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1}$ واگراست طبق آزمون مقایسه حدی با $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1 \Rightarrow$ بازه همگرایی $= (-2,0]$

۱۴- شعاع همگرایی و بازه همگرایی سری توانی $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n(\ln n)^2}$ را بدست آورید.

حل: طبق آزمون نسبت

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)(\ln(n+1))^2} \times \frac{n(\ln n)^2}{(-1)^n x^n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(\ln n)^2}{(n+1)(\ln(n+1))^2} |x| = |x| < 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n(\ln(n))^2}{(n+1)(\ln(n+1))^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} . \lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln(n))^2}{(\ln(n+1))^2} \overset{Hop}{=} 1 \times \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{\ln n}{\ln(n+1)} \right]^2 = 1$$

شعاع همگرایی $R=1$ و بازه همگرایی مطلق $= (-1,1)$

$x=-1 \Rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n(-1)^n}{n(\ln n)^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ سری همگراست طبق آزمون انتگرال $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$ $[2,+\infty)$

$f(x) \geq 0$ و پیوسته و نزولی است (فرض) بنابراین

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_2^{b} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{-1}{\ln x} \right]_2^b = -\lim_{b\to+\infty} \frac{1}{\ln b} + \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}$$ همگراست

$x=1 \Rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n (1)^n}{n(\ln n)^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2}$ پس همگرای مطلق $\sum_{n=2}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2} \right| = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ چون همگراست

بنابراین بازه همگرایی $[-1,1]$ است

۱۵- سری تیلور $y=\ln x$ حول $x=a$ را بیابید.

حل: $y = \ln x = \ln(x+a-a) = \ln(a+(x-a)) = \ln\left[a\left(1+\frac{x-a}{a}\right)\right] = \ln a + \ln\left[1+\frac{x-a}{a}\right] =$

$= \ln a + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\left[\frac{x-a}{a}\right]^{n+1}}{n+1} = \ln a + \sum (-1)^n \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)a^{n+1}}$

زیرا $, \ \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$

۱۶- سری تیلور تابع $y=e^x$ را حول $x=a$ را بدست آورید

حل: روش اول طبق قضیه تیلور:

$$y=e^x \Rightarrow y'=y''=\cdots=y^{(n)}(x)=e^x$$

$$\Rightarrow y'(a)=y''(a)=\cdots=y^{(n)}(a)=e^a$$

$$f(x)=e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}e^a\frac{(x-a)^n}{n!}=e^a\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x-a)^n}{n!}$$

به شرطی که

$$\lim_{n\to+\infty}R_n(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{e^t}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}=0 \qquad (a<t<x)$$

روش دوم:

می دانیم که $e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$

$$e^x=e^{x-a+a}=e^a\cdot e^{x-a}=e^a\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x-a)^n}{n!}$$

۱۷- با کمک سری توانی تابع $f(x)=x^2e^{-x}$ نشان دهید که $\sum_{n=1}^{+\infty}(-2)^{n+1}\frac{n+2}{n!}=4$.

حل:

$$e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\Rightarrow e^{-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^n}{n!}\Rightarrow x^2e^{-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^{n+2}}{n!}$$

با مشتق‌گیری از سری توانی بدست آمده داریم:

$$(2x-x^2)e^{-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(n+2)x^{n+1}}{n!}\xrightarrow[x=2]{\text{با فرض}}0=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(n+2)\,2^{n+1}}{n!}\Rightarrow$$

$$0=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(n+2)\,2^{n+1}}{n!}+4\Rightarrow -4=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(n+2)\,2^{n+1}}{n!}\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}(-2)^{n+1}\frac{(n+2)}{n!}=4$$

۱۸- با کمک سری توانی $y=\ln(1+x)$ نشان دهید که

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)2^n}=1-\ln 2$$

حل:

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^{n+1}}{n+1}\xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری}}\int_0^x\ln(1+t)\,dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^{n+2}}{(n+1)(n+2)}\Rightarrow$$

$$\Big[t\ln(1+t)-t+\ln(1+t)\Big]_0^x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^{n+1}}{n(n+1)}\Longrightarrow x\ln(1+x)-x+\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^{n+1}}{n(n+1)}$$

$$\xRightarrow{x=-\frac12}-\frac12\ln\left(\frac12\right)+\frac12+\ln\left(\frac12\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{2^{n+1}\,n(n+1)}\Rightarrow\frac12(-1+\ln 2)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-1}{n(n+1)2^{n+1}}$$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)2^n}=1-\ln 2$$

۱۹- سری تیلور تابع $y=\ln(x^2+2x+2)$ حول $x=-1$ را بیابید.

حل:

$$y=\ln(x^2+2x+2)=\ln\left[1+(1+x)^2\right]=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(1+x)^{2n+2}\qquad |x|<1$$

یعنی در سری توانی $\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$ بجای x قرار می‌دهیم $(1+x)^2$.

۲۰- بسط سری تیلور تابع $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+2x+2}$ حول $x=-1$ را بیابید.

$$f(x)=\frac{x+2}{x^2+2x+2}=\frac{(x+1)+1}{1+(x+1)^2}=\frac{x+1}{1+(x+1)^2}+\frac{1}{1+(x+1)^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(x+1)^{2n+1}+\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(x+1)^{2n}$$

$$=\left[(x+1)^1-(x+1)^3+(x+1)^5-\cdots\right]+\left[(x+1)^0-(x+1)^2+(x+1)^4-(x+1)^6+\cdots\right]=$$

$$=1+(x+1)^1-(x+1)^2-(x+1)^3+(x+1)^4+(x+1)^5-\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}(x+1)^n$$

۲۱- همگرائی و یا واگرائی سری $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{5^n n!}{3^n n^n}$ را معین کنید.

حل:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{5^{n+1}(n+1)!}{3^{n+1}(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{3^n n^n}{5^n n!}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{5}{3}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\frac{5}{3}\left[1-\frac{1}{n+1}\right]^n=\frac{5}{3}e^{-1}$$

$$=\frac{5}{3e}<1$$

سری بطور مطلق همگراست.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{n}{n+1}}=e^{-\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}}=e^{-1}$$

۲۲- همگرائی و یا واگرائی سری $\sum_{n=0}^{+\infty}\operatorname{sech}(n)$ را معین کنید.

حل: می دانیم که $\operatorname{sech}(n)=\dfrac{2}{e^n+e^{-n}}$ پس

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\operatorname{sech}(n)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{e^n+e^{-n}}=\sum\frac{2e^n}{e^{2n}+1}$$

از آزمون مقایسه استفاده می کنیم: می دانیم که $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{e^n}$ یک سری هندسی با قدر نسبت $r=\frac{1}{e}<1$ همگراست

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{2e^n}{e^{2n}+1}}{\frac{1}{e^n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2e^{2n}}{e^{2n}+1}=2\implies\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2e^n}{e^{2n}+1}$$ همگراست

۲۳- همگرائی و یا واگرائی سری $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n$ را بررسی کنید.

حل:

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right]^{\frac{2n}{n+1}}=\lim_{n\to+\infty}e^{-\frac{2n}{n+1}}=e^{-2}$$

پس سری واگراست چون $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n\neq 0$.

۲۴- یک سری توانی برای $f(x)=xe^x$ بیابید و سپس از روی آن نشان دهید که $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n!(n+2)}=\dfrac{1}{2}$.

حل: $e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} \Rightarrow xe^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n!} \xrightarrow{\text{با گرفتن انتگرال}} \int_0^x te^t\,dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+2)n!}$

$$\Rightarrow [te^t-e^t]_0^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+2)n!} \Rightarrow xe^x-e^x+1=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+2)n!} \xrightarrow{x=1}$$

$$1=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)n!} \Rightarrow 1=\frac12+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)n!} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)n!}=1-\frac12=\frac12$$

۲۵- با کمک سری توانی تابع $f(x)=x\tan^{-1}x$ نشان دهید که

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)}=\frac12\left[-x+(x^2+1)\tan^{-1}x\right]$$

حل: در مسئله ۵ دیدیم که

$$f(x)=x\tan^{-1}x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{2n+1}$$

حال با انتگرال گیری داریم:

$$\int_0^x t\tan^{-1}t\,dt=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+3)} \Rightarrow$$

$$\frac12\left[-t+(t^2+1)\tan^{-1}t\right]_0^x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+3)} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+3)}=\frac12\left[-x+(x^2+1)\tan^{-1}x\right]$$

$$\int_0^x t\tan^{-1}t\,dt=\left[\frac12 t^2\tan^{-1}t\right]_0^x-\int_0^x\frac{t^2\,dt}{2(1+t^2)}=\frac12x^2\tan^{-1}x-\int\frac{(t^2+1-1)\,dt}{2(1+t^2)}=$$

$$\boxed{\begin{matrix} u=\tan^{-1}t & t\,dt=dv \\ du=\frac{dt}{1+t^2} & \frac{t^2}{2}=v \end{matrix}} \quad =\frac12x^2\tan^{-1}x-\int_0^x\frac{dt}{2}+\frac12\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\frac12x^2\tan^{-1}x-\frac12x+\frac12\tan^{-1}x$$

$$=\frac12\left[-x+(1+x^2)\tan^{-1}x\right].$$

۲۶- یک سری توانی برای $f(x)=e^{-x^2}$ بیابید سپس نشان دهید که

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{2^n n!}=1$$

حل:

$$e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} \Rightarrow e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} \xrightarrow{\text{گرفتن مشتق}} -2xe^{-x^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2nx^{2n-1}}{n!} \Rightarrow -xe^{-x^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(n-1)!}$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق گیری}} -e^{-x^2}+2x^2e^{-x^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)x^{2n-2}}{n!} \Rightarrow e^{-x^2}\left[-1+2x^2\right]=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{n!}x^{2n} \xrightarrow{x=\frac{1}{\sqrt2}}$$

$$0=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n+1)}{n!\,2^n} \Rightarrow 0=-1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n+1)}{n!\,2^n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n+1)}{n!\,2^n}=1$$
