فصل ۳ تبدیل خطی

تعریف. فرض کنید که V و W دو فضای برداری روی میدان F ($F=\mathbb{R}$) باشند. تابع $T: V \longrightarrow W$ را یک تبدیل خطی می‌نامیم هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد

۱) $\forall \alpha,\beta \in V: T(\alpha+\beta)=T(\alpha)+T(\beta)$ ۲) $\forall \alpha \in V, \forall c \in F: T(c\alpha)=cT(\alpha)$

این دو شرط را می‌توان با هم یکی کرد و به صورت زیر بیان کرد.

$$\forall \alpha,\beta \in V, \forall c \in F: \quad T(c\alpha+\beta)=cT(\alpha)+T(\beta)$$

مثال ۱: نشان دهید که $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ با ضابطه $T(x,y)=(x, x+y, x-y)$ یک تبدیل خطی است.

حل.

$$\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

$$T\big(c(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\big) = T\big((cx_1+x_2, cy_1+y_2)\big) = (cx_1+x_2, cx_1+x_2+cy_1+y_2, cx_1+x_2-cy_1-y_2) = c(x_1, x_1+y_1, x_1-y_1) + (x_2, x_2+y_2, x_2-y_2) = cT(x_1,y_1)+T(x_2,y_2)$$

مثال ۲: فرض کنید که A یک ماتریس $m\times n$ باشد. نشان دهید که تابع $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ با ضابطه $T(X)=AX$ یک تبدیل خطی است.

حل: $\forall X,Y \in \mathbb{R}^n, \forall c \in \mathbb{R}: T(cX+Y)=A(cX+Y)=cAX+AY=cT(X)+T(Y)$

مثال ۳: اگر $A=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ آنگاه تابع $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطه $T(X)=AX$ طبق مثال قبل یک تبدیل خطی است. ثابت کنید که $T(X)$ برداری است که از دوران بردار X به اندازه θ حاصل می‌شود.

حل:

$$T(x,y)=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix}$$

فرض کنید که $X=(x,y)$ و φ زاویه بین بردار X و محور xها باشد و فرض کنید که $X'=(x_1,y_1)$ برداری باشد که از دوران X حول مرکز به میزان θ حاصل می‌شود. باید نشان داد که $T(X)=X'$. برای این منظور فرض کنید که نرم X برابر با r باشد یعنی $r=\|X\|$ پس $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases}$ و چون نرم X' هم همان نرم X است پس ملاحظه می‌شود که $x_1=r\cos(\varphi+\theta)$ و $y_1=r\sin(\varphi+\theta)$ بنابراین

$$X'=\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\varphi+\theta) \\ r\sin(\varphi+\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\varphi\cos\theta - r\sin\varphi\sin\theta \\ r\sin\varphi\cos\theta + r\cos\varphi\sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = AX = T(X)$$

مثال ۴: (تبدیل خطی صفر) فرض کنید که V و W دو فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ باشند. ثابت کنید که نگاشت (تابع) $T: V \longrightarrow W$ با ضابطه $T(\alpha) = 0$ ، $\forall \alpha \in V$ یک تبدیل خطی است. این تبدیل خطی را تبدیل خطی صفر می‌نامیم.

حل: $\forall \alpha, \beta \in V, \forall c \in \mathbb{R} \; : \; T(c\alpha+\beta) = 0 = 0+0 = cT(\alpha) + T(\beta)$

مثال ۵: (تبدیل خطی همانی) فرض کنید که V یک فضای برداری باشد. نشان دهید که تابع (نگاشت) $T: V \longrightarrow V$ با ضابطه $T(\alpha) = \alpha$ ، $\forall \alpha \in V$ یک تبدیل خطی است که آن را تبدیل خطی همانی می‌نامیم.

حل: $\forall \alpha, \beta \in V, \forall K \in \mathbb{R} \; : \; T(K\alpha+\beta) = K\alpha+\beta = KT(\alpha) + T(\beta)$

تعریف: تبدیل خطی $T: V \longrightarrow V$ را یک عمل‌گر خطی می‌نامیم.

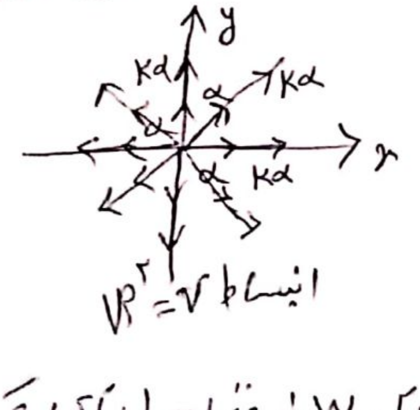
بنابراین طبق مثال ۴ و ۵ تبدیل خطی همانی و تبدیل خطی صفر هر دو عمل‌گر خطی هستند.

مثال ۶: اگر V یک فضای برداری باشد نشان دهید که $T: V \longrightarrow V$ با ضابطه $T(\alpha) = K\alpha$ ، $\forall \alpha \in V$ (که در آن $K \in \mathbb{R}$ ثابت است) یک عمل‌گر خطی است.

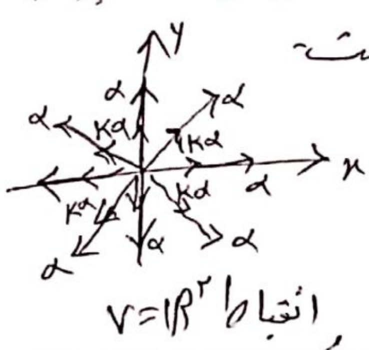
حل: $\forall \alpha, \beta \in V, \forall c \in \mathbb{R}$

$$T(c\alpha+\beta) = K(c\alpha+\beta) = cK\alpha + K\beta = c(K\alpha) + (K\beta) = cT(\alpha) + T(\beta)$$

تبصره: در تبدیل خطی مثال ۶: اگر $K>1$ این تبدیل خطی T را انبساط V گویند و اگر $0<K<1$ باشد آنگاه تبدیل خطی (عمل‌گر خطی) T را انقباض V می‌گویند و بطور هندسی یک انبساط V هر بردار V را بوسیله عامل K امتداد می‌دهد و یک انقباض V هر بردار V را بوسیله K متراکم می‌کند. این موضوع برای $\mathbb{R}^2$ در شکل زیر نشان داده شده است.



انبساط $V = \mathbb{R}^2$



انقباض $V = \mathbb{R}^2$

مثال ۷: فرض کنید که $V = C[0,1]$ فضای توابع پیوسته روی فاصله $[0,1]$ و W زیرفضای از V باشد که شامل توابع مشتق‌پذیر باشد. نشان دهید که $D: V \longrightarrow W$ ، $D(f(x)) = f'(x)$ ، $\forall f(x) \in V$ یک تبدیل خطی است.

حل: $\forall f(x), g(x) \in V, \forall c \in \mathbb{R}$

$$D(cf(x)+g(x)) = cf'(x) + g'(x) = cD(f(x)) + D(g(x))$$

مثال ۸: فرض کنید که $V=C[0,1]$ نشان دهنده ... تابع $S: V\longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \forall f(x)\in V$

$$S(f(x))=\int_0^1 f(x)\,dx$$

حل: $\forall f(x), g(x)\in V, \forall c\in\mathbb{R}:\ S(cf(x)+g(x))=\int_0^1 (cf(x)+g(x))\,dx = c\int_0^1 f(x)\,dx +$

$+\int_0^1 g(x)\,dx = cS(f(x))+S(g(x))$

مثال ۹: فرض کنید که V فضای ضرب داخلی و α بردار ثابتی در آن باشد. ثابت کنید که نگاشت $T: V\longrightarrow\mathbb{R}$

با ضابطه $\forall X\in V:\ T(X)=\langle X,\alpha\rangle$

حل:

$\forall X, Y\in V, \forall k\in\mathbb{R}:\ T(kX+Y)=\langle kX+Y,\alpha\rangle = k\langle X,\alpha\rangle+\langle Y,\alpha\rangle = kT(X)+T(Y)$

مثال ۱۰: فرض کنید که V فضای ضرب داخلی و W زیرفضای متناهی البعد V باشد که دارای پایه متعامد یکه $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r\}$ است. ثابت کنید که $T: V\longrightarrow W$ $\quad \forall\alpha\in V$

$$T(\alpha)=\langle\alpha,\alpha_1\rangle\alpha_1+\langle\alpha,\alpha_2\rangle\alpha_2+\dots+\langle\alpha,\alpha_r\rangle\alpha_r$$

یک تبدیل خطی است. (T هر بردار α در V را با تصویر عمودی خودش روی W تصویر می‌کند)

حل: $\forall\alpha,\beta\in V$ و $\forall k\in\mathbb{R}:\ T(k\alpha+\beta)=\langle k\alpha+\beta,\alpha_1\rangle\alpha_1+\langle k\alpha+\beta,\alpha_2\rangle\alpha_2+\dots+$

$+\langle k\alpha+\beta,\alpha_r\rangle\alpha_r = k\langle\alpha,\alpha_1\rangle\alpha_1+\langle\beta,\alpha_1\rangle\alpha_1+k\langle\alpha,\alpha_2\rangle\alpha_2+\langle\beta,\alpha_2\rangle\alpha_2+\dots+$

$+\dots+k\langle\alpha,\alpha_r\rangle\alpha_r+\langle\beta,\alpha_r\rangle\alpha_r = k[\langle\alpha,\alpha_1\rangle\alpha_1+\langle\alpha,\alpha_2\rangle\alpha_2+\dots+\langle\alpha,\alpha_r\rangle\alpha_r]+$

$[\langle\beta,\alpha_1\rangle\alpha_1+\langle\beta,\alpha_2\rangle\alpha_2+\dots+\langle\beta,\alpha_r\rangle\alpha_r] = kT(\alpha)+T(\beta)$

مثال ۱۱: (حالت خاصی از مثال ۱۰) فرض کنید که $V=\mathbb{R}^3$ فضای ضرب داخلی اقلیدسی باشد و W صفحه‌ای باشد که دارای پایه متعامد یکه $S=\{\vec{i},\vec{j}\}$ است (یعنی $\vec{i}=(1,0,0)$ و $\vec{j}=(0,1,0)$)

مطلوب است محاسبه $T(x,y,z)$:

حل: $T(x,y,z)=\langle(x,y,z),\vec{i}\rangle\vec{i}+\langle(x,y,z),\vec{j}\rangle\vec{j}=x\vec{i}+y\vec{j}=(x,y,0)$

مثال ۱۲: فرض کنید که V یک فضای n بعدی باشد و $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$ پایه ثابتی برای V

باشد. ثابت کنید که $T: V\longrightarrow\mathbb{R}^n$ یک تبدیل خطی است. ($\langle\alpha\rangle_S$ مختصات بردار α نسبت به پایه S است)

$$T(\alpha)=\langle\alpha\rangle_S$$

حل: $\forall\alpha,\beta\in V$ و $\forall c\in\mathbb{R}:\ T(c\alpha+\beta)=\langle c\alpha+\beta\rangle_S=\langle c\alpha\rangle_S+\langle\beta\rangle_S=$

$=cT(\alpha)+T(\beta)$

در مثال قبل دیدیم که $T: V \to \mathbb{R}^n$ ، $\forall \alpha \in V$ یک تبدیل خطی است

$$T(\alpha) = [\alpha]_S$$

قضیه ۱: اگر $T: V \to W$ یک تبدیل خطی باشد (V و W دو فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$) آنگاه

۱) $T(0) = 0$

۲) $\forall \alpha \in V : T(-\alpha) = -T(\alpha)$

۳) $\forall \alpha, \beta \in V : T(\alpha - \beta) = T(\alpha) - T(\beta)$

۴) $\forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in V ,\ \forall c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R} : T\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i T(\alpha_i)$

توجه: از قضیه ۱ قسمت ۱ برای بررسی اینکه یک تابع تبدیل خطی نیست استفاده می‌شود.

مثال ۱۳: توابع زیر تبدیل خطی نیستند زیرا $T(0) \neq 0$

الف) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = (x+y+z,\ 2x+y+2z+1)$ $\quad \boxed{T(0,0,0) = (0,1) \neq (0,0)}$

ب) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad T(x,y) = (x-y+2,\ 2x+y+3)$ $\quad \boxed{T(0,0) = (2,3) \neq (0,0)}$

تعریف: اگر V و W دو فضای برداری روی میدان F باشند مجموعه تمام تبدیلات خطی از V به W را با $L(V,W)$ نمایش می‌دهیم و در آینده نشان می‌دهیم که $L(V,W)$ خود یک فضای برداری روی میدان F است. همچنین مجموعه تمام عملگرهای $T: V \to V$ را با $L(V)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف: اگر $T: V \to W$ یک تبدیل خطی باشد آنگاه مجموعه‌ای از بردارهای V را که توسط تبدیل T به بردار صفر در W تصویر می‌شوند را هسته T می‌نامیم و با $\ker T$ نمایش می‌دهیم یعنی

$$\ker T = \{\alpha \in V \mid T(\alpha) = 0\}$$

و مجموعه تمام بردارهای W که تحت T تصاویری از حداقل یک بردار V باشند را برد T (تصویر T) نامیده می‌شود و با $\operatorname{Im} T = R(T)$ نمایش می‌دهیم یعنی

$$\operatorname{Im} T = \{\beta \in W \mid \exists \alpha \in V : T(\alpha) = \beta\}$$

یا به عبارت دیگر

$$\operatorname{Im} T = \{T(\alpha) \mid \alpha \in V\}$$

مثال ۱۴: هسته و برد تبدیلات خطی مثال های ۱و۲و۴و۵ را پیدا کنید.

حل: برای مثال ۱:

$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ و $T(x,y)=(x,x+y,x-y)$

$$\ker T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid T(x,y)=(x,x+y,x-y)=(0,0,0)\}=\{(0,0)\}$$

$$\operatorname{Im}T=\{T(x,y)\mid (x,y)\in\mathbb{R}^2\} \overset{\text{طبق}}{\underset{*}{=}} \{(x,y+x,x)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$$

$$(*)\quad T(x,y)=(a,b,c)\Rightarrow\begin{cases}x=a\\x+y=b\\x-y=c\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{cc|c}1&0&a\\1&1&b\\1&-1&c\end{array}\right]\xrightarrow[-R_1+R_3\to R_3]{-R_1+R_2\to R_2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c}1&0&a\\0&1&b-a\\0&-1&c-a\end{array}\right]\xrightarrow{R_2+R_3\to R_3}\left[\begin{array}{cc|c}1&0&a\\0&1&b-a\\0&0&c-a\end{array}\right]\Rightarrow\begin{cases}x=a\\y=b-a\\c-a=0\Rightarrow\boxed{c=a}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=x\\b=y+a=y+x\\c=a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=x\\b=y+x\\c=a\end{cases}$$

در آخر نیز نشان می دهیم که $\operatorname{Im}T\le\mathbb{R}^3$

$$\operatorname{Im}T=\langle(1,-1,1),(0,1,0)\rangle$$

برای مثال ۲:

$T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$

$T(X)=AX$

$\ker T=\{X\in\mathbb{R}^n \mid AX=0\}=$ مجموعه تمام جوابهای دستگاه همگن $AX=0$

$\operatorname{Im}T=\{AX\mid X\in\mathbb{R}^n\}=$ مجموعه تمام بردارهای مانند $B\in\mathbb{R}^n$ که طوری که دستگاه $AX=B$ سازگار باشد.

به عبارت دیگر $\operatorname{Im}(T)=$ فضای ستونی های A

برای مثال ۴: (تبدیل صفر)

$T:V\to W$

$T(\alpha)=0$

$\ker T=\{\alpha\in V\mid T(\alpha)=0\}=V$

$\operatorname{Im}T=\{0\}\le W$

برای مثال ۵: (تبدیل همانی)

$T:V\to V$

$T(\alpha)=\alpha$

$\operatorname{Im}T=V$ و $\ker T=\{0\}$

قضیه ۲: اگر $T:V\to W$ یک تبدیل خطی باشد آنگاه

الف) $\ker T\le V$ ب) $\operatorname{Im}T\le W$

اثبات (تمرین)

تبصره: فرض کنید که $T:V\to W$ و $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$ یک پایه فضای برداری V باشد و $T:V\to W$

یک تبدیل خطی باشد دراین صورت تصویر هر بردار α از V توسط $T(\alpha_1), T(\alpha_2), \ldots, T(\alpha_n)$ کاملا معین می‌شود زیرا

اگر $\alpha = \sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i$ آنگاه $T(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} c_i T(\alpha_i)$ (طبق قضیه ۱)

مثال ۱۵: اگر $S = \{(1,1,1) = \alpha_1 , (1,1,0) = \alpha_2 , (1,0,0) = \alpha_3\}$ پایه $\mathbb{R}^3$ باشد و $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ یک تبدیل خطی باشد بطوریکه $T(\alpha_1) = (1,0)$ و $T(\alpha_2) = (2,-1)$ و $T(\alpha_3) = (4,3)$ آنگاه مطلوب است محاسبه $T(2,-3,5)$.

حل. در ابتدا بردار $(2,-3,5)$ را به صورت ترکیب خطی از اعضای پایه S می‌نویسیم یعنی دستگاه $(2,-3,5) = x\alpha_1 + y\alpha_2 + z\alpha_3$ را حل می‌کنیم یعنی

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+y=-3 \\ x=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-8 \\ z=5 \end{cases}$$

پس $(2,-3,5) = 5\alpha_1 - 8\alpha_2 + 5\alpha_3$ بنابراین داریم

$$T(2,-3,5) = 5T(\alpha_1) - 8T(\alpha_2) + 5T(\alpha_3) = 5(1,0) - 8(2,-1) + 5(4,3) \Rightarrow$$

$$T(2,-3,5) = (5-16+20 , 0+8+15) = (9,23)$$

در آینده به کمک نمایش ماتریسی تبدیل خطی ضابطه تبدیل خطی T را می‌یابیم

تعریف (رتبه و پوچی) اگر $T: V \longrightarrow W$ یک تبدیل خطی باشد، آنگاه بُعد تصویر T را رتبه T می‌نامیم و با $rank(T)$ نمایش می‌دهیم همچنین با $\rho(T)$ هم نمایش می‌دهیم. و بعد هسته T را پوچی T می‌نامیم و با $nullity(T) = \nu(T)$ نمایش می‌دهیم بنابراین بطور خلاصه داریم

$$\dim ImT = rank(T) = \rho(T) \quad , \quad \dim KerT = nullity(T) = \nu(T)$$

مثال ۱۶: فرض کنید که $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ عبارت از دوران $\mathbb{R}^2$ به اندازه $\theta = \frac{\pi}{4}$ باشد. مطلوب است محاسبه $\rho(T)$ و $\nu(T)$ (یعنی رتبه و پوچی T را بیابید.)

حل.

$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$T(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow KerT = \{(0,0)\} \Rightarrow \nu(T) = \dim KerT = 0$$

$$ImT = \mathbb{R}^2 \Longrightarrow \rho(T) = 2$$

قضیه ۳ (قضیه بُعد) اگر T یک تبدیل خطی از فضای برداری n بعدی V به فضای برداری W باشد، آنگاه

$$\boxed{\rho(T) + \nu(T) = \dim V = n}$$

(اثبات در کتاب صفحه ۲۶۰)

تبصره: در حالت خاص $V=\mathbb{R}^n$ و $W=\mathbb{R}^m$ و $T:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ و $A_{m\times n}$ یک ماتریس باشد

$$T(X)=A X$$

آنگاه قضیه قبل (قضیه بعد) می گوید که

$\nu(T)=n-\rho(T)=($ تعداد ستونهای ماتریس $)-\operatorname{rank}(T)$

قضیه ۴: اگر A یک ماتریس $m\times n$ باشد آنگاه بعد فضای جواب دستگاه همگن $AX=0$ برابر با $n-\operatorname{rank}(A)$ است. (طبق تبصره قبل)

مثال ۱۷: پایه و بعد فضای جواب دستگاه همگن مقابل را بیابید:

$$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x+5y+2z=0 \\ x+4y+7z=0 \\ x+3y+3z=0 \end{cases}$$

حل:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{-R_1+R_3\to R_3 \\ -R_1+R_4\to R_4}]{-2R_1+R_2\to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[-R_2+R_4\to R_4]{-2R_2+R_3\to R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2R_2+R_1\to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{cases} x-9z=0 \\ y+4z=0 \end{cases}$$

$Z=c$ را دلخواه در نظر می گیریم

اگر W فضای مجموعه جواب دستگاه همگن باشد:

$\Rightarrow x=9c,\ y=-4c,\ z=c$

جوابها $(x,y,z)=(9c,-4c,c)=c(9,-4,1) \Rightarrow W=\langle(9,-4,1)\rangle$

$\Rightarrow \dim W=1$ و پایه جوابها $=\{(9,-4,1)\}$

طبق قضیه قبل چون $\rho(A)=\operatorname{rank}(A)=2$ پس $\boxed{\dim W=3-2=1}$

تبدیل خطی از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^m$

در این بخش تبدیل خطی از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^m$ را بررسی می کنیم و نشان می دهیم که هر تبدیل خطی $T:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ به صورت $T(X)=AX$ است. فرض کنید که $B=\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ پایه استاندارد $\mathbb{R}^n$ باشد یعنی $e_1=(1,0,\dots,0)$ و $e_2=(0,1,\dots,0)$ و ... و $e_n=(0,0,\dots,0,1)$

A را ماتریس $m\times n$ در نظر می گیریم که ستونهای آن $T(e_1)$ و $T(e_2)$ و ... و $T(e_n)$ است

در این صورت $T:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ با ضابطه $T(X)=\underset{m\times n}{A}X$.

در بخش بعد A را ماتریس نمایش تبدیل خطی T نسبت به پایه های استاندارد برای $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{R}^m$ می نامیم

مثال ۱۸: فرض کنید که $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ تبدیل خطی با ضابطه

$T(x,y)=(x+2y\ ,\ x-y)$

باشد در این صورت $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ و

$T(1,0)=(1,1)\ ,\ T(0,1)=(2,-1)$

$T(x,y)=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=(x+2y\ ,\ x-y)$

مثال ۱۹: ماتریس A را طوری بیابید که $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

$T(x,y,z)=(x+y\ ,\ x-y\ ,\ z\ ,\ x)$

$T(1,0,0)=(1,1,0,1)$ و $T(0,1,0)=(1,-1,0,0)$ و $T(0,0,1)=(0,0,1,0)$

$\Rightarrow A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

تبصره: اگر A یک ماتریس $m\times n$ باشد می توان تبدیل خطی $T:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ را طوری یافت که

$T(X)=AX$

تمرین:

۱- نشان دهید که $D:P_n \longrightarrow P_{n-1}$ با ضابطه $D(f(x))=f'(x)$ یک تبدیل خطی است

$(f'(x)=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}\in P_{n-1}$ و $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n\in P_n)$

۲- فرض کنید که $V=C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ مجموعه تمام توابع پیوسته از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ باشد نشان دهید که تابع $T:V\longrightarrow V$ با ضابطه

$\forall f\in V:\quad (T(f))(x)=\int_0^x f(t)dt$

۳- هسته و تصویر تبدیل خطی در تمرین ۲ را بدست آورید.

۴- هسته و تصویر تبدیل خطی $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ با ضابطه

$T(x,y)=(x+y\ ,\ 2x-y\ ,\ x-2y)$

را بدست آورید.

۵- بررسی کنید که آیا تابع $T:Mat_{2\times2}(\mathbb{R}) \longrightarrow Mat_{2\times2}(\mathbb{R})$ با ضابطه

$\forall A\in Mat_{2\times2}(\mathbb{R}):\ T(A)=\det A$

یک تبدیل خطی است.

۶- هسته و تصویر تبدیل خطی $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطه

$T(x,y)=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

را بیابید.

۷- فرض کنید که $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ عمل گر خطی است که هر برداری در صفحه را به میزان $\theta=\frac{\pi}{4}$ دوران می دهد، آنگاه $T(-1,2)$ و $T(x,y)$ را بدست آورید.

کاربردهای هندسی تبدیل خطی مسطح یعنی تبدیل های خطی

$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$T(X) = AX$$

با دو دید می توان به این تبدیلات خطی نگاه کرد

دید اول: به عنوان اینکه تبدیل خطی یک بردار را به یک بردار جهت دار تصویر می کند

دید دوم: به عنوان اینکه تبدیل خطی هر نقطه از صفحه را با یک نقطه دیگری از صفحه را تصویر می کند.

با دید دوم ۵ تبدیل خطی خاص (ویژه) مانند دوران، بازتاب، انبساط، انقباض و برش به صورت زیر هستند.

دوران: تبدیل خطی $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ را دوران هر نقطه از صفحه را حول مبداء مختصات به میزان θ دوران می دهد.

$$T(x,y) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

بازتاب: یک بازتاب نسبت به خطی مانند L که از مبداء می گذرد عبارت است از یک تبدیل خطی که هر نقطه از صفحه را به تصویر آینه‌ای که حول L تصویر می کند. مهمترین بازتاب ها، بازتاب های هستند که حول محورهای مختصات و حول خط $y=x$ هستند.

اگر بازتاب حول محور yها باشد $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و اگر بازتاب حول محور xها باشد آنگاه $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

و اگر بازتاب حول خط $y=x$ باشد آنگاه $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ و بازتاب حول خط $y=-x$ آنگاه $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

زیرا:

$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$T(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

بازتاب حول محور xها

$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$T(x,y) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

بازتاب حول محور yها

$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$T(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$$

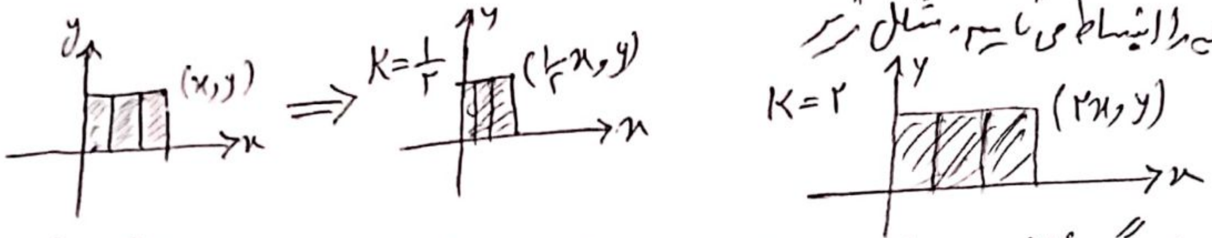
بازتاب حول خط $y=-x$

$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$T(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$

بازتاب حول خط $y=x$

انبساط و انقباض

اگر مولفه هر نقطه مانند (x,y) یعنی x، در یک عدد ثابت مثبت K ضرب شود، آنگاه تاثیر آن انبساط یا انقباض هر شکل مسطحی در جهت محور xها است. چنانچه $0<K<1$ نتیجه را انقباض و اگر $K>1$ نتیجه را انبساط می‌نامیم. شکل زیر



به همین صورت اگر مؤلفه دوم نقطه (x,y) یعنی y در یک عدد ثابت K ضرب شود، آنگاه تاثیر آن انبساط یا انقباض هر شکل مسطحی در جهت محور yها است

$T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

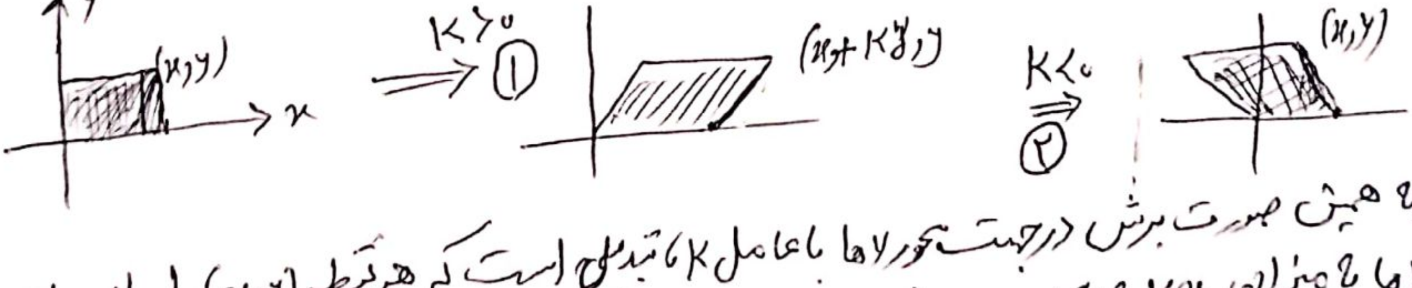
$T(x,y)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & K\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ Ky\end{bmatrix}$ یا $T(x,y)=(x,Ky)$

$T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$T(x,y)=\begin{bmatrix}K & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Kx\\ y\end{bmatrix}$ یا $T(x,y)=(Kx,y)$

برش: برش در جهت محور xها با عامل K، تبدیلی است که هر نقطه (x,y) را موازی با محور xها و به میزان Ky به نقطه جدید $(x+Ky, y)$ انتقال می‌دهد. تحت چنین تبدیلی، نقطه‌های محور xها حرکت نمی‌کنند (ثابت باقی می‌مانند) [روی محور xها چون $y=0$ است پس $x+Ky=x+0=x$]

هرچه از محور xها دورتر می‌شویم، بزرگی y افزایش می‌یابد، از این رو، نقطه‌های دورتر از محور xها، مسافت طولانی‌تری حرکت می‌کنند تا نقاطی که به محور xها نزدیکتر هستند. شکل زیر



به همین صورت برش در جهت محور yها با عامل K، تبدیلی است که هر نقطه (x,y) را موازی با محور yها به میزان Kx به نقطه جدید $(x, y+Kx)$ انتقال می‌دهد. تحت چنین تبدیلی نقطه‌های روی محور yها ثابت هستند. هرچه از محور yها دورتر می‌شویم بزرگی x افزایش می‌یابد، از این رو نقطه‌های شکل نقطه‌های دورتر از محور yها مسافت طولانی‌تری حرکت می‌کنند تا نقاطی که به محور yها نزدیکتر هستند. می‌توان نشان داد که برش‌ها تبدیل خطی‌اند (صفحه بعد)

فرض کنید که $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ برش در جهت محور x ها باشد. نشان می‌دهیم که T تبدیل خطی است

$$T(x,y) = (x+ky,\, y)$$

$$\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall c \in \mathbb{R}$$

$$T\big(c(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\big) = T\big((cx_1+x_2,\, cy_1+y_2)\big) = \big(cx_1+x_2+k(cy_1+y_2),\, cy_1+y_2\big) =$$

$$= (cx_1+kcy_1,\, cy_1) + (x_2+ky_2,\, y_2) = cT(x_1,y_1) + T(x_2,y_2)$$

برش در جهت محور y ها با عامل k

$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$T(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ kx+y \end{bmatrix}$$

برش در جهت محور x ها با عامل k

$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$T(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+ky \\ y \end{bmatrix}$$

تبصره: تبدیل همانی $I: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ هر نقطه را به خودش تصویر می‌کند. این تبدیل را می‌توان به عنوان $I(x,y) = (x,y)$ دوران صفر درجه یا به عنوان برش با عامل $k=0$ در جهت هر یک از محورها یا به عنوان انقباض یا انبساط با عامل $k=1$ در نظر گرفت.

مثال ۲: فرض کنید که صفحه‌ای به میزان θ دوران کند و آنگاه مورد یک برش با عامل k در جهت محور x ها قرار گیرد. دو تبدیل ماتریسی منفردی را بیابید که تولید اثر یکسانی با اثر دو تبدیل پیاپی قبلی داشته باشد (یعنی ترکیب دو تبدیل خطی)

حل:

$$T_1: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$T_1(x,y) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

$$T_2: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$T_2(x_1,y_1) = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+ky_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta + kx\sin\theta + ky\cos\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta + k\sin\theta & -\sin\theta + k\cos\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \cos\theta + k\sin\theta & -\sin\theta + k\cos\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \Rightarrow T = T_2 \circ T_1$$

$$T(x,y) = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

تبصره: بطور کلی اگر $T_1(X) = A_1X$ و $T_2(X) = A_2X$ و ... و $T_n(X) = A_nX$ تبدیلات خطی از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^n$ متوالی اعمال کنیم (ترکیب شوند) آنگاه نتیجه یکسانی بوسیله تبدیل ماتریسی منفرد $T(X) = AX$

حاصل می‌شود که در آن $A=A_nA_{n-1}\cdots A_2A_1$ یعنی $T=T_n\circ T_{n-1}\circ\cdots\circ T_2\circ T_1$

$$T(X)=A_nA_{n-1}\cdots A_2A_1(X)=AX$$

مثال ۲۱: الف) یک تبدیل ماتریسی از $\mathbb{R}^2$ به $\mathbb{R}^2$ را بیابید که ابتدا برش با عامل ۲ در جهت محور xها بدهد سپس بازتاب حول خط $x=y$ بدهد.

ب) یک تبدیل ماتریسی از $\mathbb{R}^2$ به $\mathbb{R}^2$ را بیابید که ابتدا بازتاب حول خط $x=y$ بدهد سپس یک برش با عامل ۲ در جهت محور xها بدهد.

حل الف) $A_1=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$ و $A_2=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ $\Leftarrow$ $A=A_2A_1=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\1&2\end{bmatrix}$

$$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 \;:\; T(x,y)=\begin{bmatrix}0&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y\\x+2y\end{bmatrix}$$

ب) $B=A_1A_2=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&0\end{bmatrix}$

$$L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 \;:\; L(x,y)=\begin{bmatrix}2&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x+y\\x\end{bmatrix}$$

نتیجه: چون $A\neq B$ پس $T(x,y)\neq L(x,y)$

مثال ۲۲: اگر A یک ماتریس مقدماتی باشد و $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$، $T(X)=AX$ آنگاه تبدیل خطی T یکی از تبدیل‌های زیر خواهد بود.

الف) برش در جهت یکی از محورهای مختصات

ب) بازتاب حول خط $y=x$

ج) انقباض در جهت محور xها و yها

د) انبساط در جهت محور xها و yها

ه) بازتاب حول یک محور

و) انقباض یا انبساط در جهت یک محور و آنگاه بازتاب حول یک محور

حل: دیدیم که ماتریس‌های مقدماتی 2×2 نتیجه یک عمل سطری مقدماتی روی ماتریس همانی $I_{2\times2}$ است بنابراین ماتریس‌های مقدماتی 2×2 عبارتند از

$$\begin{bmatrix}1&0\\k&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&k\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}k&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&k\end{bmatrix}$$

دو ماتریس $\begin{bmatrix}1&0\\k&1\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}1&k\\0&1\end{bmatrix}$ ارائه دهند برش در جهت محورها است و

ماتریس $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ بازتاب حول خط $x=y$ است.

ماتریس $\begin{bmatrix}k&0\\0&1\end{bmatrix}$ انقباض $(0<k<1)$ یا انبساط $(k>1)$ در جهت محور xها و ماتریس $\begin{bmatrix}1&0\\0&k\end{bmatrix}$ انقباض $(0<k<1)$ یا انبساط $(k>1)$ در جهت محور yها است.

از طرفی چون می‌توان نوشت

$$\begin{bmatrix}k&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-k_1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-k_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&k_1\end{bmatrix}$$

که در آن $k<0$ با فرض $k=-k_1$ که $k_1>0$

پس تبدیل $\begin{bmatrix}k&0\\0&1\end{bmatrix}$ بیانگر یک انقباض یا انبساط در جهت محور xها است که بعد از آن یک بازتاب حول محور yها انجام شده است.

و تبدیل $\begin{bmatrix}1&0\\0&k\end{bmatrix}$ بیانگر یک انقباض یا انبساط در جهت محور yها است که بعد از آن یک بازتاب حول محور xها انجام شده است.

در حالتی که $k=-1$ رابطه‌های اخیر به ترتیب عبارتند از بازتاب حول محور yها و محور xها.

تبصره: فرض کنید که A یک ماتریس معکوس‌پذیر باشد و $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ یک تبدیل خطی باشد.
$T(X)=AX$
در این صورت تبدیل خطی T معکوس دارد و معکوس آن T^{-1} است و
$T^{-1}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$
$T^{-1}(X)=A^{-1}X$
یعنی از $AX=Y$ می‌توان نتیجه گرفت $X=A^{-1}Y$

مثال ۲۳: اگر $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ صفحه را با عامل $k=\frac{1}{2}$ در جهت محور yها منقبض کند آنگاه تبدیل معکوس T را بیابید.

حل:

$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

$$T(x,y)=\begin{bmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\\frac{1}{2}y\end{bmatrix}\Rightarrow T^{-1}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad T^{-1}(x,y)=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\2y\end{bmatrix}$$

یعنی T^{-1} با $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$ تبدیل انبساط در جهت محور yها با عامل $k=2$ است.

مثال ۲۴: تبدیل معکوس $A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ عبارت است از $A^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$.

یعنی برگرداندن نقطه (x,y) به جای اولش، چون نقطه (x,y) با دوران θ جابجا شده است و با دوران $-\theta$ به جای اولش برگردانده می‌شود.

$$\begin{bmatrix}\cos(-\theta) & -\sin(-\theta)\\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

قضیه ۵: اگر $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ و A معکوس پذیر باشد آنگاه تاثیر هندسی یکسان است با $T(X)=AX$ تاثیر متوالی (ترکیب تبدیل های خطی) یک برش، انقباض، انبساط و بازتاب مناسب.

اثبات: چون A معکوس پذیر است پس ماتریس های مقدماتی $E_1, E_2, \dots, E_k$ وجود دارد که $I=E_kE_{k-1}\cdots E_2E_1A$ یعنی $A=E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_{k-1}^{-1}E_k^{-1}$ پس ماتریس A به صورت حاصل ضرب ماتریس های مقدماتی بیان می‌شود که با توجه به مثال ۲۲ اثبات قضیه کامل می‌گردد.

مثال ۲۵: ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$ را به صورت حاصل ضرب ماتریس های مقدماتی بنویسید و آنگاه تاثیر هندسی A را برحسب برش، انقباض، انبساط و بازتاب بیان کنید.

حل:

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\xrightarrow{-3R_1+R_2\to R_2}\begin{bmatrix}1&2\\0&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{2}R_2}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{-2R_2+R_1\to R_1}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$E_1=\begin{bmatrix}1&0\\-3&1\end{bmatrix},\quad E_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix},\quad E_3=\begin{bmatrix}1&-2\\0&1\end{bmatrix}\Rightarrow E_1^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix},\quad E_2^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-2\end{bmatrix},\quad E_3^{-1}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$$

$$A=E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$$

چون $\begin{bmatrix}1&0\\0&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$ پس داریم

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$$

① برش عامل ۲ در جهت محور xها

② انبساط با عامل ۲ در جهت محور yها

③ بازتاب حول محور xها

④ برش عامل ۳ در جهت محور yها

قضیه ۶: اگر $A_{2\times 2}$ یک ماتریس معکوس پذیر باشد و $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ با ضابطه $T(X)=AX$ باشد آنگاه

۱) تصویر خط راست، خطی راست است

۲) تصویر خط راست مار از مبداء، خطی راست مار از مبداء است.

۳) تصویر خطهای راست موازی، خطهای راست موازی هستند.

۴) تصویر پاره خط PQ همان پاره خط $T(P)T(Q)$ است. یعنی تصویر پاره خطی که نقطه های P و Q را به هم وصل می کند، همان قطعه خطی است که تصویرهای P و Q را به هم وصل می کند.

۵) تصویرهای سه نقطه بر یک راستا هستند اگر و فقط خود آن سه نقطه بر یک راستا باشند
(اثبات در کتاب صفحه ۲۷۰)

تبصره: طبق قضیه قبل اگر A ماتریس ۲×۲ معکوس پذیر باشد آنگاه تبدیل خطی $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ، $T(X) = AX$ مثلث ها را به مثلث ها و متوازی الاضلاع ها را به متوازی الاضلاع ها تصویر می کند.

مثال ۲۶: طبق قضیه قبل ماتریس معکوس پذیر $A=\begin{bmatrix}3&1\\2&1\end{bmatrix}$ خط راست $y=2x+1$ را به خط راست دیگری می برد (تصویر می کند) معادله آن خط را بیابید.

حل:

$$A^{-1}=\frac{1}{3-2}\begin{bmatrix}1&-1\\-2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\-2&3\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=A^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1-y_1\\-2x_1+3y_1\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3x+y\\2x+y\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{cases}x_1=3x+y\\y_1=2x+y\end{cases}, \quad \begin{cases}x=x_1-y_1\\y=-2x_1+3y_1\end{cases}$$

$$y=2x+1 \Rightarrow -2x_1+3y_1=2(x_1-y_1)+1 \Rightarrow 3y_1+2y_1=2x_1+1+2x_1 \Rightarrow$$

$$5y_1=4x_1+1 \Rightarrow \boxed{y_1=\frac{4}{5}x_1+\frac{1}{5}}$$

پس تصویر خط $y=2x+1$ خط $y=\frac{4}{5}x+\frac{1}{5}$ تحت تبدیل خطی A است.

بنابراین معادله $\begin{bmatrix}3x+y\\2x+y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$ در معادله $y=\frac{4}{5}x+\frac{1}{5}$ صدق می کند که همان معادله خط مورد نظر است.

تمرین

۱- ماتریس استاندارد را برای تبدیل خطی مسطح $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ طوری پیدا کنید که هر نقطه (x,y) را به

الف) بازتاب آن نسبت به خط $y=-x$ تصویر می کند

ب) بازتاب آن نسبت به مبداء تصویر می کند.

ج) تصویر عمودی آن روی محور xها تصویر می کند

د) تصویر عمودی آن روی محور yها تصویر می کند

۲- ماتریسی را پیدا کنید که نقطه (x,y) را حول مبداء دوران می دهد به میزان

الف) ۴۵ درجه ب) ۹۰ درجه ج) ۱۸۰ درجه د) ۲۷۰ درجه.

۳- ماتریسی را پیدا کنید که الف) برشی با عامل $k=4$ در جهت محور yها بدهد ب) برشی با عامل $k=-2$ در جهت محور xها بدهد

۴- هر یک از ماتریس های زیر را به صورت حاصل ضرب ماتریس های مقدماتی بنویسید، سپس تأثیر هندسی تبدیل ضربدر آن ماتریس را بر حسب انقباض، انبساط ها، بازتاب و برش شرح دهید.

الف) $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۲ & ۹ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ۰ & -۲ \\ ۴ & ۰ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ۱ & -۳ \\ ۴ & ۶ \end{bmatrix}$

۵- با استفاده از معکوس ماتریس ها نشان دهید که

الف) تبدیل معکوس برای بازتاب حول خط $y=x$ عبارت است از بازتابی حول خط $y=x$

ب) تبدیل معکوس برای انقباض در جهت یک محور، عبارت است از یک انبساط در جهت همان محور

ج) تبدیل معکوس برای بازتاب حول یک محور، عبارت است از بازتابی حول آن محور

د) تبدیل معکوس برای برش در جهت یک محور، عبارت است از یک برش در جهت همان محور

۶- معادله تصویر خطی با معادله $y = -۴x + ۳$ را تحت تبدیل ضربدر ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۴ & -۳ \\ ۳ & -۴ \end{bmatrix}$ بیابید.

۷- در هر قسمت، معادله تصویر خطی با معادله $y = ۲x$ را بیابید.

الف) برش با عامل $K = ۳$ در جهت محور x ها

ب) انقباض با عامل $K = \frac{۱}{۲}$ در جهت محور y ها

ج) بازتاب حول خط $y = x$

د) بازتاب حول محور y ها

هـ) دوران به میزان ۶۰ درجه

۸- معادله تصویر خطی با معادله $۲x + ۳y = ۶$ را تحت تبدیل ضربدر ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$ بیابید.

۹- در هر قسمت یک ماتریس منفرد بیابید که گویای اعمال متوالی معرفی شده باشد

الف) بازتاب حول محور y ها و سپس انبساط با عامل $K = ۵$ در جهت محور x ها و آنگاه بازتاب حول خط $y = x$

ب) دوران به میزان $\theta = ۳۰^\circ$ حول مبدأ و سپس برش با عامل $K = -۲$ در جهت محور y ها و آنگاه انبساط با عامل $K = ۳$ در جهت محور y ها.

ماتریس های تبدیل خطی (نمایش ماتریسی تبدیل خطی)

در این بخش همانند بخش قبل که برای تبدیل های خطی $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ یک ماتریس معرفی کردیم برای تبدیل خطی $T: V \longrightarrow W$ که در آن V و W دو فضای برداری با بعد متناهی روی یک میدان F هستند ($F=\mathbb{R}$) نیز یک ماتریس پیدا می کنیم.

دستور کار پیدا کردن نمایش ماتریسی یک تبدیل خطی: فرض کنید که V و W دو فضای برداری با بعد متناهی به ترتیب n و m روی میدان $\mathbb{R}$ (یا هر میدان دیگری) باشند یعنی $\dim V = n$ و $\dim W = m$ و $B=\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ یک پایه مرتب برای V و $B'=\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$ یک پایه مرتب برای W باشد و $T: V \longrightarrow W$ یک تبدیل خطی باشد در این صورت ماتریس $A_{m\times n}$ وجود دارد که $T(X) = AX$ و ستون های ماتریس A مختصات $T(\alpha_i)$ ها نسبت به پایه B' می باشد یعنی:

$$T(\alpha_1) = \sum_{j=1}^{m} A_{j1}\beta_j = A_{11}\beta_1 + A_{21}\beta_2 + \dots + A_{m1}\beta_m$$

$$T(\alpha_2) = \sum_{j=1}^{m} A_{j2}\beta_j = A_{12}\beta_1 + A_{22}\beta_2 + \dots + A_{m2}\beta_m$$

$$\vdots$$

$$T(\alpha_n) = \sum_{j=1}^{m} A_{jn}\beta_j = A_{1n}\beta_1 + A_{2n}\beta_2 + \dots + A_{mn}\beta_m$$

$$\Longrightarrow A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2j} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mj} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

مختصات $T(\alpha_j)$ نسبت به پایه B'

توجه: اگر B و B' پایه های استاندارد برای V و W باشند آنگاه ماتریس A راحت تر محاسبه می گردد (راحت تر پیدا می شود) بخصوص اگر $V=\mathbb{R}^n$ و $W=\mathbb{R}^m$ و (در صفحه بعد)

و $B=\{\underbrace{(1,0,0,\dots,0)}_{e_1},\underbrace{(0,1,0,\dots,0),\dots,(0,0,\dots,0,1)}_{e_2 \;\dots\; e_n}\}$ $\underbrace{}_{n \text{ تا } n \text{ تایی}}$ و $B'=\{(1,0,\dots,0),\underbrace{(0,1,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1)}_{m \text{ تا } m \text{ تایی}}\}$

آنگاه ستون‌های A همان مختصات $T(e_i)$ ها هستند

تعریف: ماتریس A را ماتریس نمایش تبدیل خطی T نسبت به دو پایه B و B' می‌نامیم و گاهی اوقات با $A=[T]_{B,B'}$ نمایش می‌دهیم و اگر $V=W$ و $B=B'$ آنگاه $A=[T]_B$ و در این صورت A ماتریس مربعی است.

مثال ۲۷: فرض کنید که $T: P_1 \longrightarrow P_2$ با ضابطه $T(f(x))=xf(x)$ باشد یعنی $T(a+bx)=x(a+bx)$.

ماتریس نمایش تبدیل خطی T نسبت به پایه‌های $B=\{1,x\}$ و $B'=\{1,x,x^2\}$ (یعنی پایه‌های استاندارد به ترتیب برای P_1 و P_2) را بیابید.

حل:

$$T(1)=x=0\times1+1\times x+0\times x^2$$
$$T(x)=x^2=0\times1+0\times x+1\times x^2$$

$$\Longrightarrow A=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix} \qquad [T(1)]_B=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\ [T(x)]_B=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

توجه: در مثال قبل اگر به جای $f(x)=a+bx$ قرار دهیم (a,b) و به جای $g(x)=a+bx+cx^2$ قرار دهیم (a,b,c) در این صورت به جای P_1 از $\mathbb{R}^2$ و به جای P_2 از $\mathbb{R}^3$ استفاده کنیم.

در این صورت ماتریس نمایش تبدیل خطی $T: P_1 \longrightarrow P_2$ با ضابطه $T(f(x))=xf(x)$ همان تبدیل خطی $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ با ضابطه $T(a,b)=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ است

$$T(a,b)=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\a\\b\end{bmatrix} \Longrightarrow T(a+bx)=ax+bx^2$$

مثال ۲۸: فرض کنید که $D: P_2 \longrightarrow P_1$ با ضابطه $D(f(x))=f'(x)$ باشد ماتریس نمایش D نسبت به پایه‌های استاندارد P_2 و P_1 را پیدا کنید.

حل.

$$B=\{1,x,x^2\} \qquad B'=\{1,x\}$$

$$T(1)=0=0\times1+0\times x$$
$$T(x)=1=1\times1+0\times x$$
$$T(x^2)=2x=0\times1+2\times x$$

$$\Longrightarrow A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix} \qquad [T(1)]_{B'}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$[T(x)]_{B'}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\quad [T(x^2)]_{B'}=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$$

مثال ۲۹: اگر $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ با ضابطه $T(x,y)=(x+y,-2x+4y)$ باشد

الف) ماتریس نمایش T نسبت به پایه استاندارد را بیابید.

ب) ماتریس نمایش T نسبت به پایه استاندارد برای $\mathbb{R}^2$ طرف اول و پایه $B'=\{(1,1),(1,2)\}$ برای $\mathbb{R}^2$ طرف دوم را بیابید.

ج) ماتریس نمایش تبدیل T نسبت به پایه $\beta'=\{(1,1),(1,2)\}$ برای هر دو طرف بیابید.

حل الف) ماتریس نمایش T نسبت به پایه‌های استاندارد $B=\{(1,0),(0,1)\}$

$$T(1,0)=(1,-2),\quad T(0,1)=(1,4) \Rightarrow A=\begin{bmatrix}1&1\\-2&4\end{bmatrix}$$

حل ب)

$$T(1,0)=(1,-2)=x(1,1)+y(1,2) \Rightarrow (1,-2)=(x+y,\ x+2y) \Rightarrow$$

$$\begin{cases}x+y=1\\x+2y=-2\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}x=4\\y=-3\end{matrix} \Rightarrow [T(1,0)]_{B'}=\begin{bmatrix}4\\-3\end{bmatrix}$$

$$T(0,1)=(1,4)=x(1,1)+y(1,2) \Rightarrow (1,4)=(x+y,\ x+2y) \Rightarrow \begin{cases}x+y=1\\x+2y=4\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}x=-2\\y=3\end{matrix}$$

$$\Rightarrow [T(0,1)]_{B'}=\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix} \Rightarrow A=\begin{bmatrix}4&-2\\-3&3\end{bmatrix}_{B,B'}$$

حل ج)

$$T(1,1)=(2,2)=2(1,1)+0(1,2)$$
$$T(1,2)=(3,6)=0(1,1)+3(1,2) \Rightarrow A=\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}$$

توجه: در مثال قبل دیدیم که نمایش ماتریسی تبدیل خطی به پایه‌های فضای برداری V و W بستگی دارد. در برخی از مسائل لازم است که ماتریسی ساده برای نمایش تبدیل خطی پیدا کنیم و برای این منظور لازم است که پایه‌های مناسب برای فضای برداری انتخاب کنیم.

قضیه ۷: فرض کنید که $T:V\to V$ یک عملگر خطی روی فضای برداری با بعد متناهی V باشد. اگر A ماتریس نمایش T نسبت به پایه β باشد و A^* ماتریس نمایش T نسبت به پایه β' باشد آنگاه $A^*=P^{-1}AP$ که در آن P ماتریس انتقال از پایه β' به پایه β است.
(اثبات در کتاب صفحه ۲۷۵)

تبصره: در قضیه بالا: A را ماتریس قدیم و A^* را ماتریس جدید فرض کنیم آنگاه داریم:

$$\text{ماتریس جدید} = P^{-1}(\text{ماتریس قدیم}).P$$

تبصره: در مثال ۲۹ قسمت (ج) می‌توان از قضیه قبل کمک گرفت و $P=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}$ و $P^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix}$

بنابراین $A^* = P^{-1}AP \Longrightarrow A^* = \begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}$

که در آن $A=\begin{bmatrix}1&1\\-2&4\end{bmatrix}$ نسبت به پایه‌های $B=\{(1,0),(0,1)\}$ برای طرف اول $\mathbb{R}^2$ و $B=\{(1,0),(0,1)\}$ برای طرف دوم $\mathbb{R}^2$ است. (یعنی هر دو پایه استاندارد هستند) B, B

تعریف: دو ماتریس مربعی A و B را متشابه گوییم هرگاه ماتریس مربعی و معکوس‌پذیر P وجود داشته باشد که $B=P^{-1}AP$. همچنین $A=PBP^{-1}$ در عملگر $T:V\to V$

توضیح: اگر A و B متشابه باشند آنگاه دو ماتریس نمایش تبدیل خطی T نسبت به دو پایه متفاوت برای V متشابه هستند.

بنابراین در مثال ۳۹ دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&1\\-2&4\end{bmatrix}$ و $A^*=\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}$ متشابه هستند زیرا هر دو نمایش ماتریسی عملگر $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ هستند و ماتریس $P=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}$ لازم

$$T(x,y)=(x+y,\ -2x+4y)$$

برای $A^*=P^{-1}AP$ همان ماتریس انتقال از پایه B به B' است.

حل چند تمرین از کتاب به عنوان مثال بیشتر برای نمایش ماتریسی یک تبدیل خطی

مثال ۱ (تمرین ۸۴) ماتریس نمایش تبدیل خطی $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ را نسبت به پایه $B'=\{(2,1),(-3,4)\}$ بیابید.

$$T(x,y)=(x-2y,\ -y)$$

حل: ماتریس نمایش آن نسبت به پایه استاندارد عبارت است از $A=\begin{bmatrix}1&-2\\0&-1\end{bmatrix}$ زیرا

$T(1,0)=(1,0)$ و $T(0,1)=(-2,-1)$

چون ماتریس انتقال از پایه B' به پایه $B=\{(1,0),(0,1)\}$ عبارت است از $P=\begin{bmatrix}2&-3\\1&4\end{bmatrix}$

پس ماتریس نمایش تبدیل خطی T نسبت به پایه B' عبارت است از (طبق قضیه ۷)

$$A^*=P^{-1}AP=\frac{1}{11}\begin{bmatrix}4&3\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-3\\1&4\end{bmatrix}=\frac{1}{11}\begin{bmatrix}-3&-56\\-2&3\end{bmatrix} \qquad P^{-1}=\frac{1}{11}\begin{bmatrix}4&3\\-1&2\end{bmatrix}$$

مثال ۲ (تمرین ۸۶) ماتریس نمایش تبدیل خطی $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ با ضابطه $T(x,y)=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ (دوران $\theta=\frac{\pi}{4}$) را نسبت به پایه $B'=\{(2,1),(-3,4)\}$ را بیابید.

حل:

$$A^*=\frac{1}{11}\begin{bmatrix}4&3\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-3\\1&4\end{bmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{22}\begin{bmatrix}13&-25\\5&9\end{bmatrix}$$

مثال ۳ (تمرین ۸۵) نمایش تبدیل خطی $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطه $T(x,y)=(x+7y\,,\,3x-4y)$ نسبت به دو پایه $B=\{\alpha_1=(2,2)\,,\,\alpha_2=(4,-1)\}$ و $B'=\{\beta_1=(1,3)\,,\,\beta_2=(-1,-1)\}$ را بیابید.

حل، نمایش ماتریس T نسبت به پایه B عبارت است از $A^*=\begin{bmatrix}\frac{8}{10}&\frac{61}{10}\\ \frac{18}{5}&\frac{-19}{5}\end{bmatrix}$ زیرا:

$T(2,2)=(16,-2)$ و $T(4,-1)=(-3,16) \Rightarrow \boxed{A=\begin{bmatrix}16&-3\\-2&16\end{bmatrix}}$ A ماتریس T نسبت به دو پایه B و پایه استاندارد

$$A^*=-\frac{1}{10}\begin{bmatrix}-1&-4\\-2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16&-3\\-2&16\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&4\\2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{8}{10}&\frac{61}{10}\\ \frac{18}{5}&\frac{-19}{5}\end{bmatrix}$$

که در آن $P=\begin{bmatrix}2&4\\2&-1\end{bmatrix}$ ماتریس انتقال از پایه B به پایه استاندارد است و $P^{-1}=\frac{-1}{10}\begin{bmatrix}-1&-4\\-2&2\end{bmatrix}$.

حال ماتریس انتقال Q از پایه B' به پایه B را می‌یابیم.

$$\beta_1=(1,3)=x(2,2)+y(4,-1) \Rightarrow \begin{cases}2x+4y=1\\2x-y=3\end{cases} \Rightarrow x=\frac{13}{10}\,,\ y=\frac{-2}{5}$$

$$\beta_2=(-1,-1)=x(2,2)+y(4,-1)=(2x+4y,2x-y) \Rightarrow \begin{cases}2x+4y=-1\\2x-y=-1\end{cases} \Rightarrow x=-\frac{1}{2}\,,\ y=0$$

$$\Rightarrow Q=\begin{bmatrix}\frac{13}{10}&-\frac{1}{2}\\-\frac{2}{5}&0\end{bmatrix} \Rightarrow Q^{-1}=-5\begin{bmatrix}0&+\frac{1}{2}\\+\frac{2}{5}&\frac{13}{10}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\frac{-5}{2}\\-2&\frac{-13}{5}\end{bmatrix}$$

بنابراین نمایش ماتریس T نسبت به دو پایه B' و B عبارت است از C که

$$C=Q^{-1}A^*Q=\begin{bmatrix}0&-\frac{5}{2}\\-2&-\frac{13}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{8}{10}&\frac{61}{10}\\ \frac{18}{5}&\frac{-19}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{13}{10}&-\frac{1}{2}\\-\frac{2}{5}&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{31}{2}&\frac{9}{2}\\-\frac{375}{10}&\frac{25}{2}\end{bmatrix}$$

مثال ۴ (تمرین ۸۷) نمایش ماتریسی $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ با ضابطه زیر را نسبت به پایه $B'=\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ را بیابید:

$$T(x,y,z)=(x+2y-z\,,\,-y\,,\,x+7z)$$

حل، نمایش ماتریسی T نسبت به پایه استاندارد عبارت است از A که به صورت زیر بدست می‌آید:

$$T(1,0,0)=(1,0,1)\,,\ T(0,1,0)=(2,-1,0)\,,\ T(0,0,1)=(-1,0,7) \Rightarrow A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&-1&0\\1&0&7\end{bmatrix}$$

و ماتریس انتقال از پایه B' به پایه استاندارد عبارت است از $P=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$

پس

$$A^*=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&-1&0\\1&0&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4&3\\-1&-2&-9\\1&1&8\end{bmatrix}$$

محاسبه P^{-1} در صفحه بعد

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-R_3+R_2\to R_2]{-R_2+R_1\to R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال ۵ (تمرین ۹۵) عملگر خطی $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ را طوری بیابید که

$T(1,1)=(-2,0)$

$T(1,-1)=(0,2)$

حل: روش اول: اثر تبدیل T را روی اعضای پایه استاندارد در ابتدا می‌یابیم

$$(1,1)=1(1,0)+1(0,1) \Rightarrow (-2,0)=T(1,1)=1\,T(1,0)+1\,T(0,1)$$

$$(1,-1)=1(1,0)-1(0,1) \Rightarrow (0,2)=T(1,-1)=1\,T(1,0)-1\,T(0,1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X+Y=(-2,0) \\ X-Y=(0,2) \end{cases}$$

که در آن $X=T(1,0)$ و $Y=T(0,1)$

$$\xRightarrow{\text{جمع کردن}} 2X=(-2,2) \Rightarrow \boxed{X=T(1,0)=(-1,1)}$$

$$\xRightarrow{\text{تفریق کردن}} 2Y=(-2,-2) \Rightarrow \boxed{Y=T(0,1)=(-1,-1)}$$

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad (x,y)=x(1,0)+y(0,1) \Rightarrow T(x,y)=xT(1,0)+yT(0,1)=x(-1,1)+y(-1,-1)$$

$$\Rightarrow \boxed{T(x,y)=(-x-y,\ x-y)} \quad \Rightarrow \boxed{T(x,y)=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}$$

روش دوم: فرض کنید که نمایش ماتریسی T به صورت $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد. پس

$$T(1,1)=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+b \\ c+d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a+b \\ c+d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$T(1,-1)=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a-b \\ c-d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a-b \\ c-d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a+b=-2 \\ c+d=0 \\ a-b=0 \\ c-d=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a=-1 \\ b=-1 \\ c=1 \\ d=-1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \underbrace{T(x,y)=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ یا } T(x,y)=(-x-y,\ x-y)}$$

مثال ۶ (تمرین ۸۹) ماتریس نمایش تبدیل خطی $T: P_1 \longrightarrow P_1$ با ضابطه $T(a_0+a_1x)=a_0+a_1(x+1)$ نسبت به پایه های $B=\{f_1(x)=6+3x,\ f_2(x)=10+2x\}$ و $B'=\{g_1(x)=2,\ g_2(x)=3+2x\}$ را بیابید.

حل: اگر A ماتریس نمایش T نسبت به دو پایه B در پایه B' باشد آنگاه $A=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$ زیرا

$$T(f_1(x))=T(6+3x)=6+3(x+1)=9+3x \Rightarrow af_1(x)+bf_2(x)=9+3x \Rightarrow$$

$$a(6+3x)+b(10+2x)=9+3x \Rightarrow (6a+10b)+(3a+2b)x=9+3x \Rightarrow \begin{cases} 6a+10b=9 \\ 3a+2b=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6a+10b=9 \\ -6a-4b=-6 \end{cases} \Rightarrow 6b=3 \to b=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},\ 3a=3-2b \Rightarrow 3a=3-2\left(\frac{1}{2}\right)=2 \Rightarrow \boxed{a=\frac{2}{3}}$$

$$T(f_2(x)) = T(10+2x) = 10 + 2(x+1) = 12+2x \Rightarrow 12+2x = a f_1(x) + b f_2(x) \Rightarrow$$

$$12+2x = a(6+3x) + b(10+2x) = (6a+10b) + (3a+2b)x \Rightarrow \begin{cases} 6a+10b=12 \\ 3a+2b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a+5b=6 \\ 3a+2b=2 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\text{تفریق کردن}} 3b = 4 \to \boxed{b=\frac{4}{3}} \quad \text{و} \quad 3a = 2-2b = 2-2\left(\frac{4}{3}\right) \Rightarrow 3a = 2-\frac{8}{3} = -\frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{a=-\frac{2}{9}}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

ماتریس انتقال از B' به B عبارت است از $P = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{7}{9} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$ زیرا

$$g_1(x) = c f_1(x) + d f_2(x) \Rightarrow 2 = c(6+3x) + d(10+2x) \Rightarrow \begin{cases} 6c+10d=2 \\ 3c+2d=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3c+5d=1 \\ 3c+2d=0 \end{cases} \Rightarrow 3d=1 \to \boxed{d=\frac{1}{3}} \quad \text{و} \quad 3c=-2d \Rightarrow \boxed{c=-\frac{2}{9}}$$

$$g_2(x) = c f_1(x) + d f_2(x) \Rightarrow 3+2x = c(6+3x) + d(10+2x) \Rightarrow \begin{cases} 6c+10d=3 \\ 3c+2d=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 6c+10d=3 \\ -6c-4d=-4 \end{cases} \Rightarrow 6d=-1 \to \boxed{d=-\frac{1}{6}} \quad \text{و} \quad 3c=2-2d \Rightarrow 3c = 2+\frac{2}{6} = \frac{7}{3} \Rightarrow \boxed{c=\frac{7}{9}}$$

بنابراین نمایش ماتریسی T نسبت به پایه B و B' عبارت است از

$$A^* = P^{-1} A P = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{7}{9} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

مثال ۷ (تمرین ۹۰) اگر A و B دو ماتریس متشابه باشند نشان دهید که $\det A = \det B$

حل: چون A و B متشابه هستند پس ماتریس معکوس‌پذیر P وجود دارد که $B = P^{-1}AP$

$$\det B = \det(P^{-1}AP) = (\det P^{-1}) \det A \det P = \det P^{-1} \cdot \det P \cdot \det A$$

$$= \det(P^{-1}P)\det A = \det A$$

در فصل ۴ (مقادیر ویژه و بردارهای ویژه) بیشتر به ماتریس‌های متشابه می‌پردازیم.

تمرین

۱- الف) نشان دهید که $\{\alpha_1=(1,2), \alpha_2=(3,4)\} = S$ یک پایه برای $\mathbb{R}^2$ است.

ب) اگر $\beta_1=(3,2,1)$ و $\beta_2=(6,5,4)$ دو عضو $\mathbb{R}^3$ باشد نشان دهید که یک تبدیل خطی $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ وجود دارد که $T(\alpha_1)=\beta_1$ و $T(\alpha_2)=\beta_2$ و ضابطه این تبدیل خطی را بیابید.

۲- اگر $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ آنگاه ماتریس نمایش تبدیل خطی T را نسبت به پایه های استاندارد
$T(x,y)=(x+y, 2x-y, x+2y)$ بیابید.

۳- فرض کنید که $D: P_3 \longrightarrow P_3$، نمایش تبدیل خطی D را نسبت به پایه استاندارد را بیابید.
$D(f(x)) = f'(x)$

۴- در تمرین ۳ اگر $B' = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ یک پایه برای P_3 باشد که در آن $g_i(x)=(x+t)^{i-1}$ $\forall i$ $i=1,2,3,4$
در این صورت ماتریس نمایش تبدیل خطی D را نسبت به پایه B' بیابید.

۵- فرض کنید که $T: P_2 \longrightarrow P_4$ با ضابطه $T(f(x)) = x^2 f(x)$ یک تبدیل خطی باشد

الف) ماتریس نمایش T نسبت به پایه های
$B = \{f_1(x)=1+x^2, f_2(x)=1+2x+3x^2, f_3(x)=4+5x+x^2\}$
و B' پایه استاندارد را بیابید.

ب) به کمک الف $T(-3+5x-2x^2)$ را بدست آورید.

۶- نشان دهید که اگر A و B دو ماتریس متشابه باشند آنگاه $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$

۷- نشان دهید که اگر A و B دو ماتریس متشابه باشند آنگاه A^2 و B^2 نیز متشابه هستند.

جبر تبدیلات خطی

یادآوری: اگر V و W دو فضای برداری روی میدان F باشند، مجموعه تمام تبدیلات خطی از V به W را با $L(V,W)$ نمایش می‌دهیم و اگر $V=W$ آنگاه مجموعه تمام عملگرهای خطی روی V را با $L(V)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۸: $L(V,W)$ همراه با دو عمل جمع و ضرب زیر یک فضای برداری روی میدان F است

$$\forall T_1,T_2\in L(V,W) \quad (T_1+T_2)(\alpha)=T_1(\alpha)+T_2(\alpha) \quad \forall \alpha\in V$$

$$\forall c\in F \quad (cT_1)(\alpha)=cT_1(\alpha)$$

اثبات (تمرین)

قضیه ۸: اگر V و W دو فضای برداری با بعد متناهی به ترتیب n و m باشند، در این صورت بعد فضای برداری $L(V,W)$ متناهی و برابر nm است. یعنی اگر $\dim V=n$ و $\dim W=m$ آنگاه

$$\dim L(V,W)=n.m$$

قضیه ۹: فرض کنید که V، W و U سه فضای برداری روی میدان F باشند اگر $T:V\to W$ و $L:W\to U$ دو تبدیل خطی باشند آنگاه $LT:V\to W$ با ضابطه زیر یک تبدیل خطی است.

$$\forall \alpha\in V: \quad LT(\alpha)=L(T(\alpha))$$

اثبات:

$$\forall \alpha,\beta\in V, \forall c\in F$$

$$LT(c\alpha+\beta)=L(T(c\alpha+\beta))=L(cT(\alpha)+T(\beta))=$$

$$=L(cT(\alpha))+L(T(\beta))=c(LT)(\alpha)+(LT)(\beta)$$

مثال ۱: فرض کنید که $A_{m\times n}$ و $B_{p\times m}$ دو ماتریس روی $\mathbb{R}$ باشند و

$$T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m \qquad L:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^p$$

$$T(X)=AX \quad \forall X\in\mathbb{R}^n \qquad L(Y)=BY \quad \forall Y\in\mathbb{R}^m$$

دو تبدیل خطی باشند، مطلوب است محاسبه تبدیل خطی $LT:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$. (یعنی ضابطه LT را بیابید)

حل: $\forall X \in \mathbb{R}^n : LT(X) = L(T(X)) = L(AX) = B(AX) = (BA)(X)$

مثال ۲: فرض کنید که $V = \mathbb{R}[x]$ و

$T : V \longrightarrow V$ و $D : V \longrightarrow V$

$T(f(x)) = xf(x)$ $\quad D(f(x)) = f'(x) \quad \forall f(x) \in V$

نشان دهید که $TD \neq DT$.

حل:

$$\left.\begin{aligned}(DT)(f(x)) &= D(f(x)) = D(xf(x)) = f(x) + xf'(x)\\ (TD)(f(x)) &= T(D(f(x))) = T(f'(x)) = xf'(x)\end{aligned}\right\} \Rightarrow DT \neq TD$$

در واقع $DT - TD = I_V$ زیرا

$$(DT - TD)(f(x)) = (DT)(f(x)) - (TD)(f(x)) = f(x) + xf'(x) - xf'(x) = f(x)$$

قضیه ۱۰: فرض کنید که V یک فضای برداری روی میدان F باشد اگر L و T_1 و T_2 عملگرهای خطی روی V باشند و $C \in F$ آنگاه

الف) $IL = LI = L$ $\quad$ ب) $(T_1 + T_2)L = T_1L + T_2L$ و $L(T_1 + T_2) = LT_1 + LT_2$

ج) $C(LT_1) = (CL)T_1 = L(CT_1)$

تعریف: تبدیل خطی $T : V \longrightarrow W$ را یک‌یک می‌نامیم هرگاه برای هر α و β از V

$$T(\alpha) = T(\beta) \Longrightarrow \alpha = \beta$$

با عبارت دیگر

$$\alpha \neq \beta \Longrightarrow T(\alpha) \neq T(\beta)$$

و تبدیل خطی T را پوشا نامیم هرگاه $ImT = W$ یا عبارت دیگر

$$\forall \beta \in W \;\; \exists \alpha \in V : T(\alpha) = \beta$$

تعریف: اگر $T : V \longrightarrow V$ یک تبدیل خطی باشد، تبدیل خطی $S : V \longrightarrow V$ را معکوس چپ T نامیم هرگاه $ST = I_V$ و تبدیل خطی $L : V \longrightarrow V$ را معکوس راست T می‌نامیم هرگاه $TL = I_V$ و تبدیل خطی $T : V \to V$ را معکوس‌پذیر نامیم هرگاه یک تبدیل خطی $S : V \to V$ وجود داشته باشد بطوریکه $ST = I_V$ و $TS = I_V$.

تبصره: تبدیل خطی T را معکوس پذیر نامیم اگر و فقط اگر T یک به یک و پوشا باشد

قضیه ۱۱: فرض کنید که V و W دو فضای برداری روی میدان F باشند و $T\in L(V,W)$. اگر T معکوس پذیر است آنگاه تابع معکوس آن T^{-1} یک تبدیل خطی از W به V است.

قضیه ۱۲: اگر $T:V\to W$ و $S:W\to U$ دو تبدیل خطی معکوس پذیر باشند آنگاه

$$(ST)^{-1}=T^{-1}S^{-1}$$

تعریف: تبدیل خطی $T:V\to W$ را نامنفرد نامیم هرگاه از $T(\alpha)=0$ نتیجه شود $\alpha=0$

یعنی $\forall\alpha\in V \quad T(\alpha)=0 \Rightarrow \alpha=0$

یا عبارت دیگر تبدیل خطی T نامنفرد است هرگاه $\ker T=\{0\}$.

قضیه ۱۳: تبدیل خطی $T:V\to W$ نامنفرد است اگر و فقط اگر T یک به یک باشد.

قضیه ۱۴: فرض کنید که $T:V\to W$ یک تبدیل خطی باشد، T نامنفرد است اگر و فقط اگر T هر زیرمجموعه مستقل خطی از V را برروی یک مجموعه مستقل خطی از W ببرد

مثال ۴: نشان دهید که تبدیل خطی $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ یک به یک و پوشا است

$$T(x,y)=(x+y,x)$$

سپس معکوس T یعنی T^{-1} را بیابید.

حل: $T(x,y)=(0,0)\Rightarrow (x+y,x)=(0,0)\Rightarrow \begin{cases}x+y=0\\ x=0\end{cases}\Rightarrow y=0\Rightarrow \ker T=\{(0,0)\}$

پس T یک به یک است

T پوشا است زیرا اگر $(z_1,z_2)\in\mathbb{R}^2$ دلخواه باشد کافی است که $x=z_2$ و $y=z_1-z_2$ اختیار کنیم

پس

$$T(x,y)=T(z_1-z_2,z_2)=(z_1-z_2+z_2,z_2)=(z_1,z_2)$$

$$T^{-1}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 \qquad TT^{-1}(x,y)=T(y,x-y)=(y+x-y,y)=(x,y)=I(x,y)$$

$$T^{-1}(x,y)=(y,x-y) \qquad T^{-1}T(x,y)=T^{-1}(x+y,x)=(x,x+y-x)=(x,y)=I(x,y)$$

$$\Rightarrow TT^{-1}=I,\quad T^{-1}T=I$$

مثال ۵: الف) نشان دهید که تبدیل خطی $D:\mathbb{R}[x]\to\mathbb{R}[x]$ منفرد است، ولی تبدیل خطی $\forall f(x)\in\mathbb{R}[x]:\ D(f(x))=f'(x)$

$T:\mathbb{R}[x]\to\mathbb{R}[x]$

$T(f(x))=xf(x)$ $\forall f(x)\in\mathbb{R}[x]$ نامنفرد است.

ب) نشان دهید که تبدیل خطی D پوشا است و تبدیل خطی $E:\mathbb{R}[x]\to\mathbb{R}[x]$ با ضابطه‌ی مقابل معکوس راست D است!

$$E(c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n)=c_0x+\frac{1}{2}c_1x^2+\cdots+\frac{1}{n+1}c_nx^{n+1}$$

ج) نشان دهید که تبدیل خطی $L:\mathbb{R}[x]\to\mathbb{R}[x]$ با ضابطه‌ی زیر معکوس چپ T است و

$$L(c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n)=c_1+c_2x+\cdots+c_nx^{n-1}$$

L عملگر حذف جمله‌ی ثابت و سپس تقسیم آن بر x است.

حل الف:

$f(x)=\alpha \Rightarrow D(\alpha)=(\alpha)'=0\Rightarrow \alpha\in\ker D$ $\forall\alpha\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \ker D\neq\{0\}$ (در واقع $\ker D=\mathbb{R}$) $\Rightarrow$ D منفرد است

$T(f(x))=0\Rightarrow xf(x)=0\Longrightarrow f(x)=0$ زیرا x نمی‌تواند دلخواه مثلاً عدد یک باشد.

$\Rightarrow \ker T=\{0\}\Rightarrow$ T نامنفرد است یا T تک به تک است

ب) چون $\operatorname{Im}D=\mathbb{R}[x]$ زیرا $D(f(x))=g(x)$

$\forall g(x)\in\mathbb{R}[x]\Rightarrow\exists f(x)\in\mathbb{R}[x]:D(f(x))=g(x)$

یعنی $f'(x)=g(x)$ به عبارت دیگر تابع اولیه $g(x)$ که همان $f(x)$ است وجود دارد.

$$(DE)(f(x))=D(E(f(x)))=D(E(c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n))=$$

$$=D\left(c_0x+\frac{1}{2}c_1x^2+\cdots+\frac{1}{n+1}c_nx^{n+1}\right)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n=f(x)$$

(با فرض $f(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n$)

$$\Longrightarrow DE=I$$

ولی $ED\neq I$ زیرا

$$(ED)(f(x))=E(D(f(x)))=E(f'(x))=c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n\neq f(x)$$

ج)

$$(LT)(c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n)=L(c_0x+c_1x^2+\cdots+c_nx^n)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n$$

$\Rightarrow LT=I$ پس L معکوس چپ T است.

$$(TL)(c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n)=T(L(c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n))=$$

$$=T(c_1+c_2x+\cdots+c_nx^{n-1})=c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n\neq f(x)\Rightarrow TL\neq I$$

قضیه ۱۵: فرض کنید V و W دو فضای برداری با بعد متناهی روی میدان F باشند و $\dim V = \dim W = n$

اگر $T: V \longrightarrow W$ یک تبدیل خطی باشد آنگاه احکام زیر هم ارز هستند:

۱) T معکوس پذیر است ۲) T نامنفرد است ۳) T پوشا است

۴) اگر $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ یک پایه برای V باشد آنگاه $T(B) = \{T(e_1), T(e_2), \dots, T(e_n)\}$ یک پایه برای W است.

۵) پایه‌ای مانند $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ برای V وجود دارد که $T(B) = \{T(\alpha_1), \dots, T(\alpha_n)\}$ پایه‌ای برای W است.

تعریف: تبدیل خطی $T: V \longrightarrow W$ را یک یکریختی (ایزومورفیسم) نامیم هرگاه T یک به یک و پوشا باشد. اگر چنین یکریختی وجود داشته باشد آنگاه می‌گوییم V با W یکریخت (ایزومورف) است و می‌نویسیم $V \cong W$.

قضیه ۱۶: هر فضای برداری n بعدی روی میدان F با F^n یکریخت (ایزومورف) است.

مثال ۶: P_{n-1} مجموعه تمام چندجمله‌ایها از درجه $(n-1)$ با $\mathbb{R}^n$ ایزومورف است. زیرا $\dim \mathbb{R}^n = \dim P_{n-1} = n$ و $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow P_{n-1}$ با ضابطه زیر یک تبدیل خطی یک به یک و پوشا است:

$$T(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1}$$

تمرین: تبدیل خطی بودن T و یک به یک و پوشا بودن T را بررسی کنید.

مثال ۷: $Mat_{2\times2}(\mathbb{R})$ با $\mathbb{R}^4$ یکریخت است. زیرا $\dim \mathbb{R}^4 = 4 = \dim Mat_{2\times2}(\mathbb{R})$ و تبدیل خطی $T: Mat_{2\times2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4$ با ضابطه زیر یک به یک و پوشا است

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a, b, c, d)$$

تمرین: نشان دهید که T یک به یک و پوشا است.

تمرین

۱) اگر تبدیل خطی $S: P_n \longrightarrow P_n$ با ضابطه $S(f(x)) = f(x+1)$ موجود باشد نشان دهید که تبدیل خطی $T: P_n \longrightarrow P_n$ وارون S است

$$T(f(x)) = f(x-1)$$

۲- نشان دهید که تبدیل خطی $T: P_4 \longrightarrow P_4$ با ضابطه $T(f(x)) = f(x) + f'(x)$ معکوس دارد و معکوس T را بیابید

۳- کدام یک از عملگرهای زیر روی P_3 وارون دارند؟ (در صورت وجود وارون را بیابید)

الف) $D(f(x)) = f'(x)$ ب) $S(f(x)) = f(x) + f(-x)$ ج) $T(f(x)) = f(x) + 2f'(x)$

۴- فرض کنید که a و b و c اعداد حقیقی باشند و $T: P_n \longrightarrow P_n$ با ضابطه زیر تعریف شده است

$$T(f(x)) = af(x) + bxf'(x) + cx^2 f''(x)$$

الف) نشان دهید که $T(x^n) = (a + bn + cn(n-1))\,x^n$

ب) اگر a و b و c مثبت باشند، نشان دهید که T وارون دارد.

۵- فرض کنید که S و T عملگرهای خطی روی P_3 باشند که به صورت زیر تعریف می‌شوند

$S(f(x)) = f(x+1)$ و $T(f(x)) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2} f''(x) + \frac{1}{6} f'''(x)$

نشان دهید که $S = T$.