فصل ششم:

اصول شمارش

قوانین شمارش

فاکتوریل : حاصل ضرب n عدد متوالی صحیح مثبت می باشد به طوری که هر عدد در عدد صحیح قبل از خود ضرب می شود و با نماد n_i نشان داده می شود.

$$n_i=n(n-r_1)(n-r_2)(n-r_3)$$

مثال ۱:

$$5i=5\times4\times3\times2\times1$$

$$3!=3\times2\times1$$

۱. ترتیب (Arrangment)

حالت گروه بندی n پدیده یا واقع (پیشامد ، حادثه) را ترتیب گویند که از قاعده فاکتوریل پیروی می کند. به عبارت دیگر تعداد جایگشت n تایی n عنصر یا شئی یا رویداد را ترتیب گویند. در ترتیب تقدم و تاخر مهم است.

سوال : نفر به چند طریق می توانند دور یک میز بنشینند؟

$$(n-1)\,! = (6-1)\,! = 5! =120$$

الف- ترتیب بدون تکرار (ساده)

یعنی n شی متمایز را به چند صورت می توان در گروه های r تایی در یک ردیف مرتب کرد. تعداد دسته هایی rتایی از n شی ء متمایز عبارتست از :

$$\mathbf{P_r^n} = \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r})!}$$

مثال ۲: اگر تکرار اعداد مجاز نباشد با استفاده از ۴ عدد ۲ و ۷ و ۸ و ۵ چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟

$$\mathbf{P_r^n} = \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r})!} = \frac{\mathbf{4}!}{(\mathbf{4}-\mathbf{3})!} = \mathbf{4}\times\mathbf{3}\times\mathbf{2}\times\mathbf{1} = \mathbf{24}$$

مثال ۳ : با اعداد ۱،۲،۳،۴،۵ چند عدد سه رقمی با ارقام غیر تکراری می توان نوشت؟

$$\mathbf{P_r^n} = \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r})!} = \frac{\mathbf{5}!}{(\mathbf{5}-\mathbf{3})!} = 60$$

ب-ترتیب با تکرار :

حالت گروه بندی r پیشامد از n پیشامد می باشد.

$$\mathbf{p_r^n} = \boldsymbol{n^r}$$

مثال ۴: اگر تکرار اعداد مجاز باشد با استفاده از سه عدد ۱ و ۲ و ۳ چند عدد ۲ رقمی می توان نوشت؟

$$\mathbf{p_r^n} = \boldsymbol{n^r} = \mathbf{3^2} = \mathbf{9}$$

۲. جایگشت :

به طرز قرار گرفتن n شی متمایز کنار یکدیگر را جایگشت آن n شی گویند. در واقع ترتیب منظمی از اشیا است. یک جایگشت از n شی ء عبارتست از قرار دادن آنها در یک صف یا ردیف با رعایت یک نظم و ترتیب خاص. حروف A، l و i را به عنوان شی درنظر بگیرید در این صورت Ali یک جایگشت از این سه حرف می باشد. توجه کنید که ترتیب قرار گرفتن حروف مهم است و ilA نیز یک جایگشت دیگر از این حروف است و با جایگشت قبلی متفاوت است.

الف- **جایگشت بدون تکرار** (ساده): تعداد حالت های مختلف مرتب کردن n شیءمتمایز در یک ردیف (n از n) و بدون تکرار برابر$\boldsymbol{n!}$ است.

$$\boldsymbol{if}\ (\boldsymbol{n}=\boldsymbol{m}) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{P_m^n} = \boldsymbol{n}!$$

مثال ۵: اگر تکرار اعداد مجاز نباشد با کمک اعداد ۵و ۲ ،۷ ،۸ چند عدد چهار رقمی می توان نوشت؟

$$\boldsymbol{P_m^n} = \boldsymbol{n}! \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{P_m^n} = \boldsymbol{n}! = \mathbf{4}! = \mathbf{4} \times \mathbf{3} \times \mathbf{2} \times \mathbf{1} = \mathbf{24}$$

ب- **جایگشت با تکرار**

هدف یافتن این است که n شیء را که در آن n_1 شیء از یک نوع و n_2 شیء از نوع دیگر و ... و n_k شی ء از نوع k باشد را به چند صورت مختلف می توان در یک ردیف مرتب کرد (توجه : ترتیب مهم است). لذا اگر از n شیء، n_1 تای آنها مشابه یکدیگر و n_2 تای آنها مشابه یکدیگر و ... n_K تای آنها مشابه یکدیگر باشند تعداد حالاتی که می توان این n شی ء را در یک ردیف مرتب کرد عبارتست از:

$$\mathbf{P^{n}_{n,n,\dots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\ n_2!\ .\ .\ .\ n_k!}}$$

مثال ۶: کلمه BABA دارای ۴ حرف است به چند طریق می توان آن را نوشت که۲ حرف A و ۲ حرف B داشته باشد (حروف مشابه).

$$\mathbf{P^{n}_{n,n,\dots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\ n_2!\ .\ .\ .\ n_k!} = P^{4}_{2,2} = \frac{4!}{2!\ 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 2} = 6}$$

مثال ۷: به چند طریق می توان دانشجویان یک کلاس ۲۰ نفری را به دسته های ۳، ۴، ۶ و ۷ نفری تقسیم کرد؟

$$\mathbf{P^{n}_{n,n,\dots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\ n_2!\ .\ .\ .\ n_k!} = P^{20}_{3,4,6,7} = \frac{20!}{3!\,4!\,6!\,7!} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \dots.}{3 \times 2 \times 4 \times 3 \times 2 \dots}}$$

نکته : تعداد کل اعضای دسته ها بایستی برابر با تعداد کل باشد.

مثال۸ : با حروف کلمه مسلمانان چند جایگشت مختلف می توان نوشت؟

$$\mathbf{P^{n}_{n,n,\dots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\ n_2!\ \ n_3!} = P^{4}_{2,2} = \frac{8!}{2!\ 2!\ 2!} = \frac{8 \times 7!}{8} = 7!}$$

مثال ۹ : تعداد جایگشت های ababacd را محاسبه کنید.

$$\mathbf{P^{n}_{n,n,\dots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\ n_2!\ \ n_3!} = P^{4}_{3,2} = \frac{7!}{3!\ 2!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 2} = 1680}$$

۳. ترکیب(Combination):

در این حالت گروه بندی m پیشامد از n پیشامد مورد نظر می باشد اما تقدم و تاخر پیشامد ها مورد توجه نیست.

در ترکیب فقط تعداد راههای انتخاب m شی ء از بین n شی ء مهم است ولی ترتیب آنها **بی اهمیت** است.

تعدادهای ترکیب های m از n مساوی است:

$$\mathbf{C_r^n} = \frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{r!(n-r)!}}$$

مثال ۱۰ : تعداد ترکیب های سه تایی از چهار حرف A,B,C,D را محاسبه کنید.

$$\mathbf{C_r^n} = \frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{r!\,(n-r)!}} = \frac{\mathbf{4\times 3\times 2\times 1}}{\mathbf{3!\,(4-3)!}} = \frac{\mathbf{4\times 3\times 2\times 1}}{\mathbf{3\times 2\times 1}} = \mathbf{4}$$

مثال۱۱ : به چند طریق می توان از بین ۵ نفر ۳ نفر را برای بازی انتخاب نمود.

$$\mathbf{C_r^n} = \frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{r!\,(n-r)!}} = \frac{\mathbf{5!}}{\mathbf{3!\,(5-3)!}} = \frac{\mathbf{5\times 4\times 3}}{\mathbf{3!\,(2!)}} = \mathbf{10}$$

مثال ۱۲: یک مجموعه ۵ عضوی چند زیر مجموعه ۳ عضوی دارد؟

$$\mathbf{C_3^5} = \frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{r!\,(n-r)!}} = \frac{\mathbf{5\times\ 4\times 3\times 2\times 1}}{\mathbf{3!\,(5-3)!}} = \mathbf{10}$$

مثال ۱۳ **:** از بین ۵ دانشجوی مهندسی ژنتیک و ۳ دانشجوی گیاهپزشکی به چند طریق می توان ۳ نفر برای کار در آزمایشگاه انتخاب کرد به طوری که لااقل ۲ نفر آنها دانش آموخته ژنتیک باشند؟

لااقل = کمِ کم ۲ تا ژنتیک باشد یعنی می تواند ۲ ژنتیک + ۳ ژنتیک

$$\binom{\mathbf{5}}{\mathbf{2}} \times \binom{\mathbf{3}}{\mathbf{1}} + \binom{\mathbf{5}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{5!}}{\mathbf{2!\,(5-2)!}} \times \frac{\mathbf{3!}}{\mathbf{1!\,(3-1)!}} + \frac{\mathbf{5!}}{\mathbf{3!\,(5-3)!}} = 10\times 3 + 10 = 40$$

مثال۱۴: از بین ۵ دانشجوی رشته مهندسی فضای سبز و ۳ دانشجوی رشته مهندسی باغبانی به تصادف ۳ نفر برای انجام کار آزمایشگاهی معرفی می شوند. با کدام احتمال دو نفر معرفی شده از رشته مهندسی فضای سبز هستند؟

$$n(\boldsymbol{S}) = \binom{\mathbf{8}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{8!}}{\mathbf{3!\,(8-3)!}} = \frac{\mathbf{8}\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2}{\mathbf{3}\times 2\times 5\times 4\times 3\times 2} = 56$$

$$\boldsymbol{n}\,(\boldsymbol{A}) = \binom{\mathbf{5}}{\mathbf{2}} \times \binom{\mathbf{3}}{\mathbf{1}} = 10\times 3 = 30 \qquad \boldsymbol{P}\,(\boldsymbol{A}) = \frac{\boldsymbol{n}\,(\boldsymbol{A})}{\boldsymbol{n}\,(\boldsymbol{S})} = \frac{\mathbf{30}}{\mathbf{56}}$$

تمرین ۱: در یک سالن سخنرانی ۴صندلی خالی وجود دارد. ۴نفر از بیرون وارد سالن می شوند. این ۴ نفر به چند طیرق می توانند کمار هم بنشینند؟

تمرین ۲: کتابداری می خواهد شش کتاب متفاوت با نامهای مختلف را در یک قفسه کتابخانه بدون در نظر گرفته هیچ شرطی از راست به چپ بچیند. این کار را به چند صورت می تواند انجام دهد؟

تمرین ۳: به چند طریق ۳ دانشجوی سال اول و ۴ دانشجوی سال دوم می توانند بر روی ۷ صندلی در یک ردیف کنار هم قرار گیرند.؟

تمرین ۴: با حروف کلمه دیدم چند کلمه می توان ساخت؟

تمرین ۵: با حروف باباخانیان چند کلمه ده حرفی می توان نوشت؟

تمرین ۶: با ارقام به کار رفته در عدد ۳۴۳۳۴چند عدد پنج رقمی می توان نوشت؟

تمرین۷: از بین ۱۰ نفر از دانشجویان ممتاز درس آمار و احتمالات می خواهیم ۵ نفر را انتخاب نموده و هر کدام از کارهای زیر را به چند طریق می توان انجام داد؟

الف) به اردو بفرستیم.

ب) به آنها هدیه دهیم. به این ترتیب که به نفر اول یک لپ تاب، به دومی یک سکه، به سومی یک فلش مموری هدیه دهیم.

تمرین ۸: به چند طریق می توان برای یک بازی فوتبال یک داور وسط و دو داور خط را از بین ۵ نفر انتخاب کرد؟

تمرین ۹: از حروف واژه های زیر چه تعداد جایگشت های مجزا می توان تشکیل داد؟

الف- minab

ب- ehsaninia

ج- بهبهانیان

تمرین ۱۰: چند حالت مختلف را می توان با ۴ پرچم سفید، ۳ پرچم قرمز و ۲ پرچم آب تهیه نمود؟

تمرین ۱۱: به چند طریق می توان از بین ۸ نفر یک تیم ۵ نفره فوتسال انتخاب کرد؟

فصل هفتم

احتمالات

مفاهیم اولیه:

احتمالات یا پیشامد (probability):

احتمالات به معنی عدم اطمینان یا همان فراوانی نسبی وقوع یک حادثه می باشد و برای پیش بینی وقایع آینده بر مبنای اطلاعات و شواهد موجود استفاده می شود.

احتمال :

پیدا کردن تعداد حالات و شانس حالت های مختلف یک حادثه یا پیشامد یا رخداد یا واقعه. دو نوع احتمال وجود دارد:

احتمال ذهنی (Subjective):

مقادیر این نوع احتمال متغیر بوده و وابسته به نظر اشخاص است.

احتمال عینی (Empirical):

مقادیر این نوع احتمال ثابت بوده و مقدار آن از قبل مشخص است و به عقاید اشخاص بستگی ندارد.

آزمایش تصادفی : آزمایشی که نتیجه آن از قبل به صورت قطعی مشخص نباشد. مثلاً در پرتاب یک سکه قبل از پرتاب مشخص نیست که شیر می آید یا خط.

آزمایش قطعی : آزمایشی که نتیجه آن از قبل مشخص باشد.

تعریف کلاسیک احتمال :احتمال یک پیشامد عبارتست از تعداد عضوهای آن پیشامد بروی تعداد عضوهای فضای نمونه. به عبارت دیگر:

$$\boldsymbol{P\ (A) = \frac{n\ (A)}{n\ (S)}}$$

خواص (قوانین) احتمال:

۱- احتمال هر حادثه ای یک عدد مثبت است. $P\ (A) \geq 0$

۲- احتمال هر حادثه ای همواره بین 1و صفر است . $0 \leq P(A) \leq 1$

۳-مجموع احتمال حوادث همواره یک است. $\sum P_i = 1$

فضای نمونه:

مجموعه حالت های ممکن یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه آن آزمایش گویند و آن را با S نشان می دهند.

مثال ۱: یک سکه را دو بار پرتاب می کنیم:

فضای نمونه ای سکه $S = \{HH, HT, TH, TT\}$

مثال ۲: تاسی را یک بار پرتاب می کنیم:

فضای نمونه ای تاس $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

پیشامد:

به هریک از زیرمجموعه های فضای نمونه یک پیشامد گفته می شود.

- اگر پیشامدی فقط یک عضو داشته باشد آن را پیشامد ساده گویند.
- پیشامدهای که بیش از یک عضو داشته باشند پیشامد مرکب گویند.

احتمال وقوع پیشامدی مثل A برابر است با تعداد عضوهای پیشامد A به تعداد عضوهای فضای نمونه :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

مثال۳: پرتاب سکه:

آزمایش تصادفی	فضای نمونه
پرتاب یک سکه	{ خ ، ش }
پرتاب دو سکه	{خ خ ، ش خ ،خ ش ، ش ش}
پرتاب سه سکه	{ش ش خ ، ش خ ش ، خ ش ش ، ش ش ش خ خ خ ، ش خ خ ، خ ش خ ، ش خ خ ، }
۲^n	تعداد عضوهای پرتاب n سکه

مثال ۴: پرتاب تاس:

فضای نمونه	آزمایش تصادفی
{۱،۲،۳،۴،۵،۶}	پرتاب یک تاس
{(۱و۱)،(۱و۲)،(۱و۳)،(۱و۴)،(۱و۵)،(۱و۶) ،(۲و۱)،...،(۲و۶)،...،(۶و۱)،...،(۶و۶) }	پرتاب دو تاس
تعداد عضوهای پرتاب n تاس	۶^n

مثال ۴: در پرتاب دو سکه، احتمال اینکه یک بار شیر ظاهر شود، چقدر است؟

S ={خ خ ، ش خ ،خ ش ، ش ش}

A ={ش خ ،خ ش}

$$P\,(A) = \frac{n\,(A)}{n\,(S)} = \frac{2}{4} = 0.5$$

مثال۵: در پرتاب دو سکه، احتمال اینکه حداقل یک بار شیر ظاهر شود، چقدر است؟

S={خ خ ، ش خ ،خ ش ، ش ش}

A={ش خ ،خ ش ، ش ش}

$$P\,(A) = \frac{n\,(A)}{n\,(S)} = \frac{3}{4} = 0.75$$

مثال۶: در پرتاب سه سکه، احتمال اینکه دو بار شیر ظاهر شود، چقدر است؟

S= {خ خ خ ،خ خ ش ،خ ش خ ، ش خ خ، ش ش خ ، ش خ ش ،خ ش ش ، ش ش ش}

A={ ش ش خ ، ش خ ش ،خ ش ش}

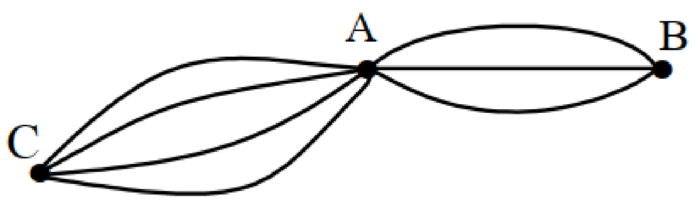
$$P\,(A) = \frac{n\,(A)}{n\,(S)} = \frac{3}{8} = 0.375$$

قواعد احتمال:

قانون جمع احتمال :

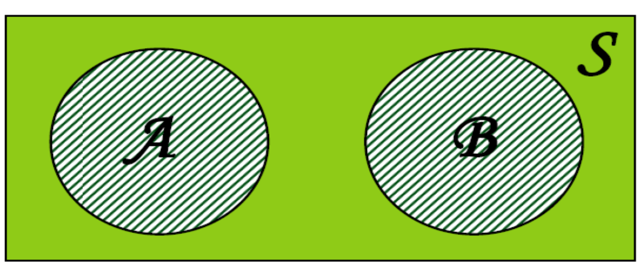
اگر کاری را بتوان به m طریق و کار دیگر را به n طریق انجام داد و این دو کار را نتوان همزمان انجام داد، آنگاه کار اول یا کار دوم را می توان به m+n طریق میتوان انجام داد.

مثال ۷: فرض کنیم از شهر A به سه طریق به شهر B و به چهار طریق به شهر C سفر کرد. به چند طریق می توان از شهر A به شهر B یا شهر C مسافرت کرد؟



حل : کار اول را سفر از شهر A به شهر B درنظر بگیرید که به سه طریق قابل انجام است ($m = 3$) و کار دوم را سفر از شهر A به شهر C در نظر بگیرید که به چهار طریق قابل انجام است ($n = 4$). پس به ۷ طریق ($m + n = 7$) از شهر A به شهر B یا شهر C سفر نمود که این همان قاعده جمع احتمالات است.

۱. هر گاه دو زیر مجموعه B,A از یک مجموعه S هیچ عضو مشترکی نداشته باشند آنها را **ناسازگار یا مانعه جمع** گویند. (پیشامدهایی که امکان وقوع همزمان نداشته باشند، یعنی با وقوع یکی امکان وقوع دیگری وجود نداشته باشد)



مثال ۸: در پرتاب یک تاس دو زیر مجموعه شماره های زوج و شماره ۵ ناسازگار بوده و نمی توانند با هم اتفاق بیفتند.

$S =\{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6\}$ $A : \{2 , 4 , 6\}$ $B : \{5\}$ $A \cup B :\{2, 4 , 6 , 5\}$

$P (A\cup B) = P (A)+P(B)$

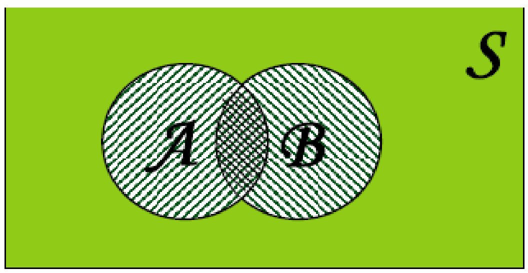
اجتماع A و B بیانگر وقوع زیر مجموعه A یا زیر مجموعه B می باشد که بایستی با هم جمع شوند.

مثال ۹ : احتمال آمدن عدد۴ یا۵ در یک بار پرتاب تاس را محاسبه کنید.

$S = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6\}$ $\quad A : \{ 4 \}$ $\quad B : \{5\}$ $\quad A \cup B : \{ 4 , 5\}$

$P(4 \cup 5) = P(4) + P(5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

۲. هر گاه دو زیر مجموعه B , A از یک مجموعه S دارای عضو مشترک باشند آن دو مجموعه را **سازگار** گویند.



$P(A \cup B) = P(A)+P(B)-P(A \cap B)$

مثال ۱۰: احتمال آمدن اعداد زوج و یا قابل بخش پذیر بر۳ در یک بار پرتاب تاس را محاسبه نمایید.

$S = \{1, 2 , 3 , 4 , 5 , 6\}$

$A:\{2 , 4 , 6\}$ احتمال آمدن اعداد زوج

$B:\{3,6\}$ احتمال آمدن اعداد بخش پذیر بر ۳

$P(A \cap B) =$ احتمال اینکه زوج و بخش پذیر بر ۳ باشد:

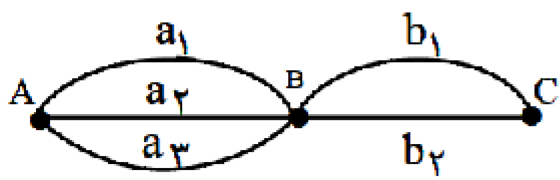
$P(A \cup B) = ?$

$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

قانون ضرب احتمالات :

زمانی به کار می رود که چند پیشامد با هم اتفاق بیفتد. اگر A به m حالت و B به n حالت اتفاق بیافتد، آنگاه هر دو پیشامد B و A می توانند به $m \times n$ حالت اتفاق بیفتند. فرض کنید از شهر A به سه طریق بتوان به شهر B سفر نمود و از شهر B نیز به دو طریق به شهر C سفر کرد. به چند طریق می توان به شهر C سفر کرد؟

با توجه به شکل ابتدا باید از شهر A به B و سپس به شهر C سفر کرد که این دو عمل بایستی یکی پس از دیگری و پشت سرهم انجام شوند تا کل کار یعنی سفر از شهر A به شهر C انجام شود. سفر از شهر A به B به سه طریق یعنی $m = 3$ و از شهر B به C یعنی $n = 2$ طریق امکان پذیر است. لذا کل کار به $m \times n$ حالت یعنی ۶ طریق قابل انجام است.



۱) $a_1 b_1$ ۳) $a_2 b_1$ ۵) $a_3 b_1$

۲) $a_1 b_2$ ۴) $a_2 b_2$ ۶) $a_3 b_2$

پیشامد مستقل :

دو یا چند پیشامدی مستقل هستند که احتمال وقوع هریک از آنها تحت تاثیر وقوع دیگری قرار نگیرد. مثل شیر یا خط آمدن سکه.

احتمال برای پیشامدهای مستقل:

چون A و B هیچ تاثیری بر روی هم ندارند برای محاسبه احتمال اشتراک آنها به شکل زیر عمل می شود:

$P(A\cap B)= P(A)\times P(B)$

مثال۱۱: تاسی را دو بار پرتاب نموده ایم. مطلوب است احتمال مشاهده ۴، ۵ یا ۶ در آزمایش اول و ۱، ۲، ۳ یا ۴ در آزمایش دوم.

$$P(A\cap B)= P(A)\times P(B) = \frac{3}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{12}{36}= \frac{1}{3}$$

مثال ۱۲: احتمال این که سه فرزند اول خانواده هر سه پسر باشند چه قدر است؟

$$\mathbf{P\,(A_1) = \frac{1}{2}}, \qquad \mathbf{P\,(A_2) = \frac{1}{2}}\,, \qquad \mathbf{P\,(A_3) = \frac{1}{2}}$$

در هر بار زایمان، احتمال پسر شدن $\frac{1}{2}$ و مستقل از زایمان های قبل و بعد است و این احتمال همیشه به همین صورت است پس:

$$\mathbf{P\,(A_1, A_2, A_3\,) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}= \frac{1}{8}}$$

مثال ۱۳ : احتمال انتخاب ۳ توپ قرمز، سفید و آبی از جعبه ای شامل ۶ توپ قرمز، ۴ توپ سفید و ۵ توپ آبی را در صورتی که هر توپ انتخاب شده، مجدداً جایگذاری شود؛ پیدا کنید. وقایع R و B و W مستقل از هم هستند.

$$\mathbf{P\,(RWB\,) = P\,(R\,).\,P\,(W\,).\,P\,(B\,) = \frac{6}{15}\times\frac{4}{15}\times\frac{5}{15}= \frac{8}{225}}$$

مثال ۱۴ : در یک کیسه ۲ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و در کیسه دیگر ۳ مهره سفید و ۴مهره سیاه وجود دارد از هر یک از کیسه ها به طور تصادفی یک مهره بیرون آورده می شود احتمال این که دو مهره سفید چقدر است؟

P(سفید بودن مهره در کیسه اول) $= \frac{2}{5} = P(A)$

P(سفید بودن مهره در کیسه دوم) $= \frac{3}{7} = P(B)$

$$P(A\cap B) = P\,(A) \times P(B) = \frac{2}{5}\times\frac{3}{7}=\frac{6}{35}$$

اگر فقط از کیسه اول دو مهره را بدون جایگزینی خارج کنیم احتمال سفید بودن چقدر است ؟

$$\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{20}$$

اگر فقط از کیسه اول دو مهره را با جایگزینی خارج کنیم احتمال سفید بودن چقدر است ؟

$$\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$$

- اگر با جایگزینی خارج شود بدین معناست که دوباره مهره برگردانده می شود.

مثال ۱۵: A,B دو پیشامد مستقل می باشند در صورتی که P(A)=0/5 و P(B)=0/5 باشد احتمال پیشامد P(A∩ B) را محاسبه کنید.

$$P\ (A\cap B) = P\ (A) \times P\ (B)=0/5 \times 0/5=0/25$$

مثال ۱۶ : دو تاس قرمز وسفید با هم پرتاب می شوند احتمال این که تاس سفید عددی فرد و تاس قرمز عددی از مضرب ۳ باشد را بدست آورید.

$$P\ (A\cap B) = P\ (A) \times P\ (B)= \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{6}{36}$$

۱. پیشامد وابسته :

دو یا چند پیشامدی وابسته هستند که احتمال وقوع هریک از آنها تحت تاثیر وقوع دیگری باشد در این حالت احتمال وقوع توام آنها برابر است با حاصل ضرب احتمال وقوع یکی از آنها در احتمال وقوع دیگری به شرطی که اولی وقوع یافته باشد.

$$P\ (A\cap B) = P\ (A) \times P\ (B|\boldsymbol{A})$$
$$P\ (A\cap B) = P\ (B) \times P\ (A|\boldsymbol{B})$$
$$P\ (A\cap B\cap C) = P\ (A) \times P\ (B|\boldsymbol{A}) \times P\ (C|\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})$$

مثال ۱۷ : احتمال انتخاب ۳ توپ قرمز، سفید و آبی را از جعبه ای شامل ۶ توپ قرمز، ۴ توپ سفید و ۵ توپ آبی در شرایطی برآورد کنید که پس از انتخاب هر توپ، دیگر به جعبه برگردانده نشود.

$$P(E_۱) = P(R)$$
$$P(E_۲) = P(w)$$
$$P(E_۳) = P(B)$$

$$\boldsymbol{P(E_۱\, E_۲\, E_۳) = P(E_۱).P(E_۲ \left| E_۱ \right.).P(E_۳ \left| E_۱\, E_۲ \right.) =}$$
$$\boldsymbol{(\frac{۶}{۱۵}).(\frac{۴}{۱۴}).(\frac{۵}{۱۳}) = \frac{۱۲۰}{۲۷۳۰} = \frac{۴}{۹۱}}$$

مثال ۱۸: در ظرفی ۳ مهره سفید و ۴ مهره سیاه وجود دارد دو مهره متوالی به صورت کاملا تصادفی و بدون جایگزینی از ظرف بیرون آورده می شود احتمال این که هر دو مهره سیاه باشند را بدست آورید.

$PA\cap B) = P(A)\times P(B|\boldsymbol{A}) = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{7}} \times \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{6}} = \frac{\mathbf{12}}{\mathbf{42}}$

مثال ۱۹: در جعبه ای ۴ مهره سفید و۵ مهره آبی داریم ۳ مهره به صورت تصادفی و بدون جایگزینی خارج می کنیم احتمال این که هر سه مهره آبی باشند را محاسبه کنید.

$$P\,(A\cap B\cap C) = P\,(A) \times P\,(B|\boldsymbol{A}) \times P\,(C|\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}) = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{9}} \times \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{8}} \times \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{7}} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{42}}$$

- اگر در یک مسئله موضوع جایگذاری مطرح نشود مسئله بایستی به روش جایگذاری حل گردد.

مثال ۲۰: از ظرفی که شامل ۶ توپ قرمز ۴ توپ سفید و۵ توپ آبی است یک توپ به تصادف خارج می کنیم مطلوب است:

الف) احتمال این که توپ خارج شده قرمز باشد؟ $\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{15}}$

ب) توپ خارج شده سفید باشد؟ $\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{15}}$

ج) قرمز یا سفید باشد؟

$$P\,(A\cup B) = P(A)+P(B) = \;= \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{15}} + \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{15}} = \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{15}}$$

احتمال شرطی :

وقتی دو واقعه یا حادثه وابسته به یکدیگر باشد وقوع یا عدم وقوع یکی بر دیگری تاثیر می گذارد در این حالت احتمال وقوع یکی از پس از اینکه دیگری به وقوع پیوسته باشد. در محاسبه احتمال برخی مواقع شخص از تعدادی از خصوصیات جامعه از قبل آگاه است و می خواهد احتمال را در صورت دانستن آن خصوصیات به دست آورد که این نوع احتمال را احتمال شرطی می گوییم. فرض کنید پیشامدی مانند E2 رخ داده است. احتمال وقوع E1 به شرط E2 که با نماد ($P(B|\boldsymbol{A}$ نشان می دهیم عبارتست از:

$$P(E1|\mathbf{E2}) = \frac{\boldsymbol{P(E1\cap E2)}}{\boldsymbol{P(E2)}}$$

احتمال وقوع E1 به شرط E2 عبارتست از:

$P(E2|\mathbf{E1}) = \frac{P(E1 \cap E2)}{P(E1)}$

مثال ۲۱: در پرتاب یک تاس احتمال اینکه عدد ۴ بیاید در صورتی که بدانیم عدد به دست آمده زوج است به صورت زیر محاسبه می شود:

$S = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6\}$

$E1 = \{ 4 \}$

$E2 = \{2 , 4 , 6\}$

$P(E1) = \frac{1}{6}$

$P(E2) = \frac{3}{6}$

$P(E1 \cap E2) = \frac{1}{6}$

$P(E1|\mathbf{E2}) = \frac{P(E1 \cap E2)}{P(E2)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$

مثال ۲۲ : تاسی را دوبار پرتاب می کنیم، اگر بدانیم مجموعه خال ها کمتر از ۶ است احتمال اینکه خال ها مساوی باشند را بدست آورید.

S = {(1,1) , (1,2) , (1,3) , (1,4) , (1,5) , (1,6) , (2,1) , (2,2) , (2,3) , (2,4) , (2,5) , (2,6) , (3,1) , (3,2) , (3,3) , (3,4) , (3,5) , (3,6) , (4,1) , (4,2) , (4,3) , (4,4) , (4,5) , (4,6) , (5,1) , (5,2) , (5,3) , (5,4) , (5,5) , (5,6) , (6,1) , (6,2) , (6,3) , (6,4) , (6,5) , (6,6) }

مجموعه خال ها کمتر از ۶ باشند:

E2 = { (1,1) , (1,2) , (1,3) , (1,4) , (2,1) , (2,2) , (2,3) , (3,1) , (3,2) , (4,1)} = 10

مجموعه خال ها مساوی باشند:

E1 = { (1,1) , (2,2) , (3,3) , (4,4) , (5,5) , (6,6) } = 6

$P(E2) = \frac{10}{36}$ $P(E1) = \frac{6}{36}$ $P(E1 \cap E2) = \frac{2}{36}$

$P(E1|\mathbf{E2}) = \frac{P(E1 \cap E2)}{P(E2)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{10}{36}} = \frac{1}{5}$

مثال ۲۳ : اگر$P(A)=\frac{1}{2}$ و $P(B)=\frac{1}{3}$ و $P(A\cap B)=\frac{1}{42}$ باشد مطلوب است :

الف) $P(A|\boldsymbol{B})$ $\quad$ $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$

ب) $P(B|\boldsymbol{A})$ $\quad$ $P(B|\mathbf{A})=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

ج) $P(A\cup B)$ $\quad$ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$

تمرین ۱: در کیسه ای ۴ مهره سیاه و ۶ مهره قرمز وجود دارد. دو مهره به تصادف و بدون جایگذاری از کیسه خارج میکنیم مطلوب است احتمال اینکه:

الف- هر دو سیاه باشد. $\quad$ $P(B1\ B2) = ?$

ب- هر دو قرمز باشند. $\quad$ $P(R1\ R2) = ?$

ج- اولی سیاه دومی قرمز $\quad$ $P(BR) = ?$

د- یکی سیاه یکی قرمز $\quad$ $P(BR+RB) = ?$

تمرین ۲: تاس سالمی را پرتاب می کنیم. اگر بدانیم عدد ظاهر شده فرد می باشد، احتمال اینکه عدد ظاهر شده کمتر از ۴باشد، چقدر است؟

فصل هشتم

توزیع های احتمال

متغیرهای تصادفی و توزیع های احتمال:

- متغیر تصادفی به هر یک از اعضای فضای نمونه مقدار عددی را نسبت می دهد. متغییر تصادفی را با X نشان می دهیم. در محاسبه احتمالات و حالت های مختلف به جای استفاده از حالت و وضعیتِ عناصر فضای نمونه، از اعداد مرتبط به آنها استفاده می شود. بدین صورت تابعی از فضای نمونه به مجموعه اعداد حقیقی تعریف نموده و به کمک آن تابع، بیان توصیفی داده ها را به مقادیر عددی تبدیل می کنیم.

- متغیرهای تصادفی توابعی هستند که دامنه آنها اعضای فضای نمونه و برد آنها مجموعه ای از اعداد حقیقی است:

$$X: \quad S \longrightarrow R$$

مثال ۱: می دانیم که فضای نمونه آزمایش پرتاب دو سکه به صورت $S = \{HH, HT, TH, TT\}$ است. (H: شیر و T: خط)

اگر در این دو پرتاب متغیر X را تعداد خط ها درنظر بگیریم، در این صورت مقادیر X به ترتیب ۰، 1 و 2 خواهد بود. اگر تعداد خط های رو شده را با متغیر تصادفی X نشان دهیم در این صورت X مقادیر ۰، ۱ و ۲ را خواهد داشت:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{X\,(HH) = 0} \\ \boldsymbol{X\,(HT) = 1} \\ \boldsymbol{X\,(TH) = 1} \\ \boldsymbol{X\,(TT) = 2} \end{aligned}\right\} \longrightarrow 0, 1, 2$$

- متغیرهای تصادفی را با حروف لاتین بزرگ X و Z وY و ... و مقادیر آن را با حروف کوچک x و z و yو ... می نویسیم.

چون مقدار متغیر X از قبل از آزمایش مشخص نیست و نمی توان به طور دقیق آن را مشخص نمود به آن یک متغیر تصادفی گویند.

انواع متغیر تصادفی:

- **متغیرهــای گسســته** : تعداد مقادیری که می توانند اختیار کنند متناهی (محدود) یا شمارش پذیر است.
- **متغیرهــای پیوسته** : تعداد مقادیری که می توانند اختیار کنند نامتناهی (نامحدود) است. مقادیر موجود در یک بازه را اختیار می کنند. مانند مدت زمان لازم برای انجام یک کار مشخص.

توزیع احتمال (تابع احتمال) : Probability Distribution

با استفاده از تابع احتمال، احتمال هر یک از مقادیر متغیر تصادفی مشخص می گردد. به عبارت دیگر توزیع احتمال، تابعی است که دامنه آن مقادیر ممکن متغیر تصادفی و برد (حوزه آن) احتمالات مربوط به هر متغیر تصادفی است. بنابراین بر اساس اینکه متغیر گسسته یا پیوسته باشد توزیع نیز گسسته یا پیوسته نام می گیرد.

توزیع احتمال هر متغیر گسسته :

تابعی است که به هر مقدار متغیر تصادفی گسسته، احتمال آن را نسبت دهد و آن را با F (x) نشان می دهند.

$F(x) : X \longrightarrow [0 \quad 1 \quad 2]$

توزیع احتمال را می توان با استفاده از فرمول، جدول و نمودار به نمایش گذاشت.

مثال ۳: دو سکه همزمان پرتاب می شوند. متغیر تصادفی X نشانگر تعداد شیرهای مشاهده شده است. توزیع احتمال این متغیر تصادفی را مشخص نمایید.

اعضای فضای نمونه	$P(e_i)$	X=x
$e_1 = (TT)$	$\frac{1}{4} = 0/25$	0
$e_2 = (TH)$	$\frac{1}{4} = 0/25$	1
$e_3 = (HT)$	$\frac{1}{4} = 0/25$	1
$e_4 = (HH)$	$\frac{1}{4} = 0/25$	2

$$\boldsymbol{P(0) = P(X=0) = P(e_1) = \frac{1}{4} = 0/25}$$

$$\boldsymbol{P(1) = P(X=1) = P(e_2) + P(e_3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0/5}$$

$$\boldsymbol{P(2) = P(X=2) = P(e_4) = \frac{1}{4} = 0/25}$$

جدول توزیع احتمال متغیر :

جدولی که در آن تمام مقادیری که متغیر تصادفی x اختیار می کند به همراه احتمال متناظر با مقدار x جدول توزیع احتمال نام دارد.

جدول توزیع احتمال	
X	P (X)
0	۰/۲۵
1	۰/۵
2	۰/۲۵
کل	۱

تابع توزیع احتمال F (x) دارای خصوصیات زیر می باشد :

- به ازای هر مقدار x ، تابع $0 \leq F(x) \leq 1$ می باشد.
- مجموع احتمال xها برابر با ۱ است: $\sum \boldsymbol{F(x) = 1}$ (x∈R) x عضو اعداد حقیقی باشد.)

مثال ۴ : دو تاس را با هم پرتاب می کنیم و متغیر تصادفی x را برابر مجموع اعداد روی دو تاس در نظر می گیریم.

الف) توزیع احتمال متغیر x را تشکیل دهید.

ب) احتمال این که مجموع اعداد روی دو تاس حداکثر ۴ باشد را محاسبه کنید.

ج) احتمال این که مجموع اعداد روی دو تاس بین ۶ و ۹ باشد را پیدا کنید.

تاس ۲: {۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱}　　　　تاس ۱: {۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱}

مجموع اعداد ۲ تاس :

X= {2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 , 11 , 12}

S = {(1,1) , (1,2) , (1,3) , (1,4) , (1,5) , (1,6) , (2,1) , (2,2) , (2,3) , (2,4) , (2,5) , (2,6) , (3,1) , (3,2) , (3,3) , (3,4) , (3,5) , (3,6) , (4,1) , (4,2) , (4,3) , (4,4) , (4,5) , (4,6) , (5,1) , (5,2) , (5,3) , (5,4) , (5,5) , (5,6) , (6,1) , (6,2) , (6,3) , (6,4) , (6,5) , (6,6) }

الف) توزیع احتمال متغیرx

تاس اول تاس دوم	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲

$$\sum P(x) = 1 \Rightarrow \sum P(x) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{36}{36} = 1$$

x	2	3	4	۵	6	7	8	9	10	11	12
P(x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

ب) احتمال این که مجموع اعداد روی دو تاس حداکثر ۴ باشد را محاسبه کنید.

$$P\ (x\leq 4) = P\ (4) + P\ (3) + P\ (2) = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{36}} + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{36}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{36}} = \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{36}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$$

ج) احتمال این که مجموع اعداد روی دو تاس بین ۶ و ۹ باشد را پیدا کنید.

$$P\ (6\leq x\leq 9) = P\ (7) + P\ (8) = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{36}} + \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{36}} = \frac{\mathbf{11}}{\mathbf{36}}$$

مثال۵: اگر x برابر با تعداد پسر در خانواده های ۴ فرزنده باشد؛ جدولی را تشکیل دهید که توزیع احتمال x را نشان دهد.

پ پ پ پ
پ پ پ د
پ پ د پ
پ پ د د
پ د پ پ
پ د پ د
پ د د پ
پ د د د

د پ پ پ
د پ پ د
د پ د پ
د پ د د
د د پ پ
د د پ د
د د د پ
د د د د

فرزند اول	فرزند دوم	فرزند سوم	فرزند چهارم
پ	پ	پ	پ
			د
		د	پ
			د
	د	پ	پ
			د
		د	پ
			د
د	پ	پ	پ
			د
		د	پ
			د
	د	پ	پ
			د
		د	پ
			د

امید ریاضی مجموع احتمالات E(x):

برای یک توزیع امید ریاضی برابر است با مجموع حاصل ضرب های x در احتمال متناظر با آن f(x) .

مثال ۶: امید ریاضی توزیع احتمال بالا به صورت زیر محاسبه می شود:

$$E(x) = f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots + f_nx_n = \sum f_nx_n = \sum fx$$

$$E(x) = 0\left(\frac{1}{16}\right) + 1\left(\frac{4}{16}\right) + 2\left(\frac{6}{16}\right) + 3\left(\frac{4}{16}\right) + 4\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{32}{16} = 2$$

مثال ۷ : اگر توزیع احتمال متغیر تصادفی x به صورت جدول زیر باشد مقدار E(X) را بدست آورید.

x	۸	۱۲	۱۶	۲۰	۲۴
f(x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	?	$\frac{1}{14}$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}$

$$f(x=16) = 1-\left[\frac{1}{8}+\frac{1}{6}+\frac{1}{14}+\frac{1}{12}\right] = 1-\left[\frac{21+28+12+14}{168}\right] = 1-\frac{25}{56} = \frac{31}{56}$$

$$E(x) = X\,.\,P\,(X) = 8\left(\frac{1}{8}\right) + 12\left(\frac{1}{6}\right) + 16\left(\frac{31}{56}\right) + 20\left(\frac{1}{14}\right) + 24\left(\frac{1}{12}\right) = 1 + 2 + 8/86 + 1/43 + 2 = 13/29$$

مثال ۸ : برای جدول توزیع احتمال زیر،

تعداد پسر (x)	۰	۱	۲	۳	۴
تابع احتمال یا تابع فراوانی x	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

$E(x^2 + 1)$ را محاسبه کنید.

X	-۱	۰	۱
f(X)	۰/۲	۰/۵	۰/۳

ابتدا مقدار X^2+1 بدست می آوریم:

X^2+1	۲	۱	۲
f(X)	۰/۲	۰/۵	۰/۳

$$E(x^2 + 1) = 2(0/2) + 1\ (0/5) + 2\ (0/3) = 1/5$$

واریانس متغییر تصادفی:

فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته و تابع احتمال $P(X) = x$ (تابع چگالی احتمال $f_X(x)$) باشد. در اینصورت واریانس متغیر تصادفی Xعبارت است از:

$$V(X) = E[X - E(X)]^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

مثال ۹: در پرتاب دو سکه، فرض کنید متغیر تصادفی Xتعداد شیرهای ظاهر شده باشد. در این صورت امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی X بدست آورید؟

X	۰	۱	۲
$f(x)$	۰/۲۵	۰/۵	۰/۲۵

$$E(X) = \sum_x x \times f(x) = ۰\times۰/۲۵ + ۱\times۰/۵ + ۲\times۰/۲۵ = ۱$$

$$E(X^۲) = \sum_x x^۲ \times f(x) = ۰^۲\times۰/۲۵ + ۱^۲\times۰/۵ + ۲^۲\times۰/۲۵ = ۱/۵$$

$$V(X) = E(X^۲) - (E(X))^۲ = ۱/۵ - ۱^۲ = ۰/۵$$

تمرین ۱: فرض کنید سه سکه را تواماً پرتاب نماییم. اگرX تعداد شیرهای مشاهده شده در سه پرتاب باشد، مجموعه مقادیرX و تابع احتمال آن را تعیین کنید.

تمرین ۲ : دو تاس با هم پرتاب می شوند.

الف - تابع توزیع احتمال X را بدست آورید.

ب- احتمال اینکه مجموع شماره هایی که ظاهر می گردند ۷ باشد را محاسبه کنید.

ج - احتمال اینکه مجموع عددهای ظاهر شده ۷ یا ۱۲ باشد را بدست آورید.

د- احتمال اینکه مجموع عددهای ظاهر شده زوج یا بزرگتر از ۷ باشد را بدست آورید.

تمرین ۳: در پرتاب یک تاس، متغیر تصادفی را مشخص نموده و جدول توزیع احتمال و امیدریاضی را محاسبه کنید.

تمرین ۴: فرض نمایید X در پرتاب یک تاس مساوی با دو برابر عددی است که ظاهر می شود. مطلوب است محاسبه میانگین، انحراف معیار و توزیع فراوانی X.

تمرین ۵: تابع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر می باشد. اگر امید ریاضی آن برابر ۴ باشد ، مقادیر a و b را محاسبه کنید.

X	۱	۲	۳	a
F_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	b